

# Phénomène d'oscillation argumentaire



Daniel Cintra, Pierre Argoul  
Université Paris-Est, Laboratoire Navier (UMR 8205),  
CNRS, ENPC, IFSTTAR,  
F-77455 Marne La Vallée, Cedex 2, France  
e mail: [daniel.cintra@enpc.fr](mailto:daniel.cintra@enpc.fr), [pierre.argoul@enpc.fr](mailto:pierre.argoul@enpc.fr)



# Phénomène d'oscillation argumentaire

Plan :

- Équation canonique.
- Dispositifs expérimentaux.
- Mécanisme physique en jeu.
- Méthode de centrage.
- Représentation de l'état du système.
- Simulations numériques.
- Conclusion.

# Phénomène d'oscillation argumentaire

- Oscillateur à 1 DDL type Duffing
- Force extérieure :
  - harmonique, pulsation  $\nu \gg \omega_0$  oscillateur linéaire
  - localisée en espace
- Conditions initiales de l'oscillateur : amplitude et phase.

Sous certaines conditions : maintien à un niveau stable d'énergie.

Si oscillateur non linéaire : ensemble discret de niveaux d'énergie stables.

# Équation canonique

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\beta \frac{dx}{d\tau} + x + \mu x^3 = A H(x) \sin\left(\frac{\nu}{\omega_0} \tau\right)$$

avec :  $\begin{cases} \tau = \omega_0 t \\ \text{conditions initiales en } x \text{ et } \frac{dx}{d\tau} \end{cases}$

et :

$x$  = coordonnée d'espace (sans dimension),

$\beta$  = dissipation,

$\mu$  = non-linéarité de la force de rappel (Duffing),

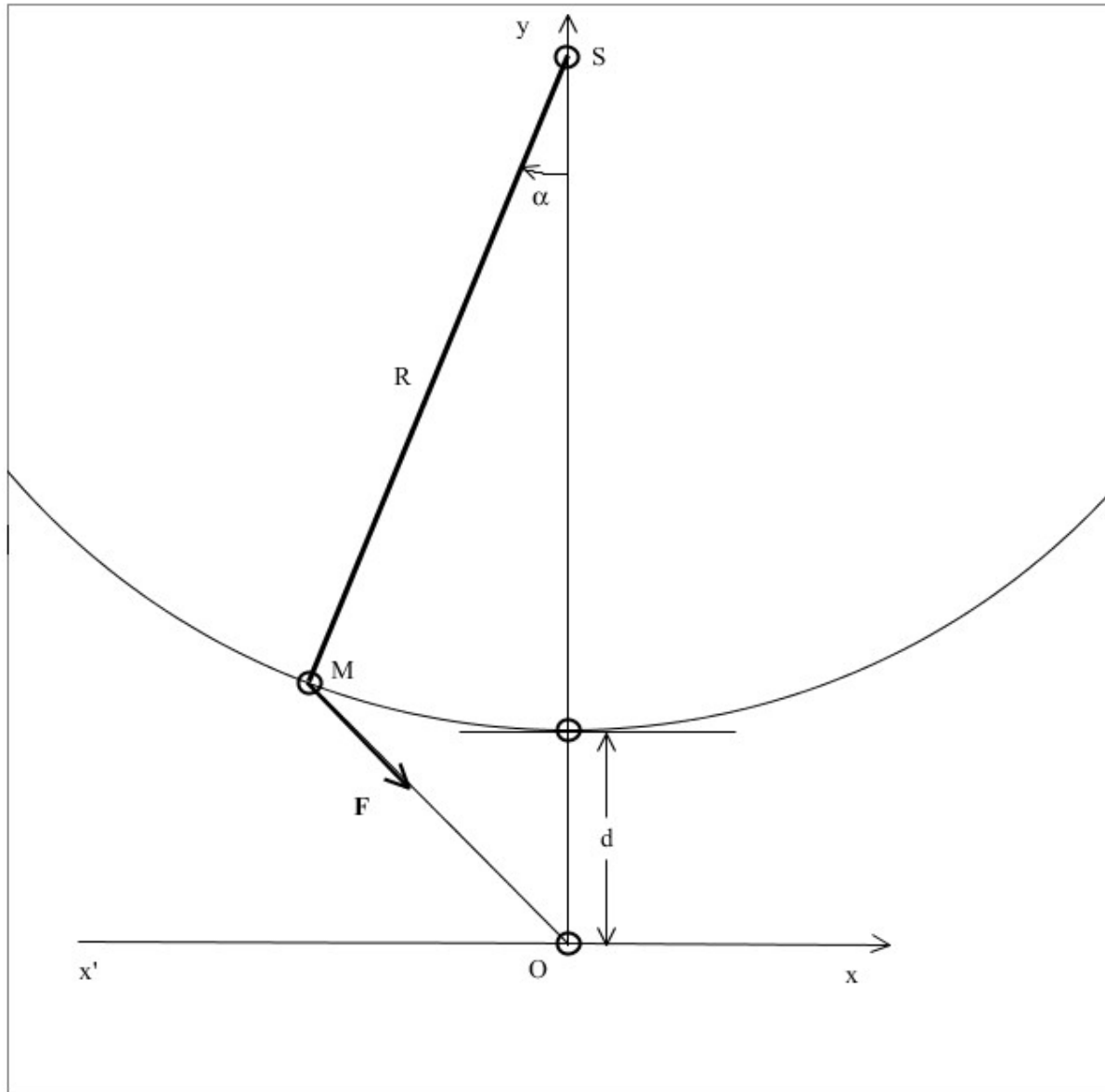
$A$  = amplitude de la force de rappel,

$H$  = fonction de  $x$ , % force extérieure agissant sur l'oscillateur ( $H$  paire ou impaire,  $0 \leq |H| \leq 1$ ),

$\nu$  = pulsation de la force extérieure.

# Dispositifs expérimentaux

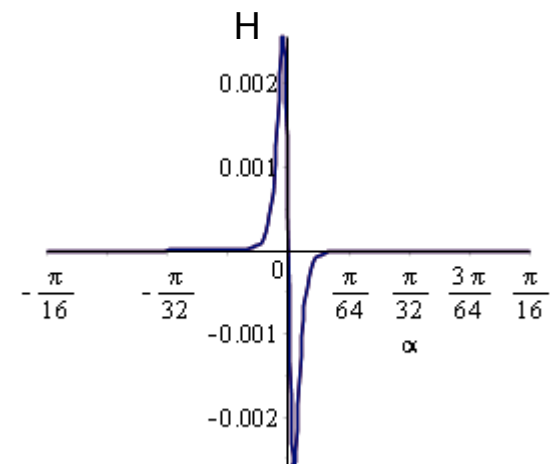
Pendule de Soulier (1925) - Béthenod (1938).



En M : sphère d'acier.  
En O : bobine d'axe vertical.

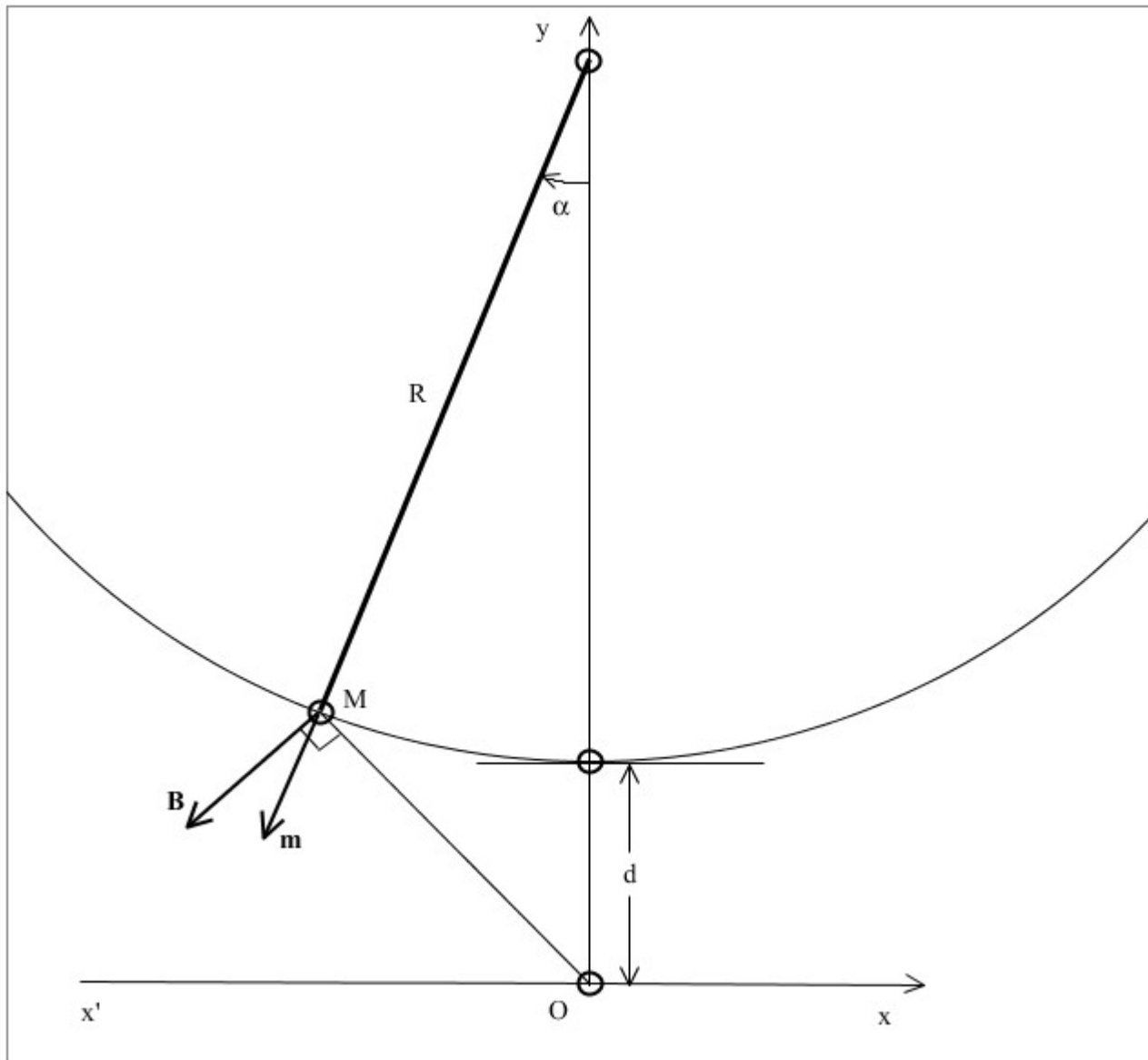
$$H(\alpha) = \frac{\alpha}{(1 + \gamma \alpha^2)^3}$$

$$\gamma = \frac{R(R+d)}{d^2}$$



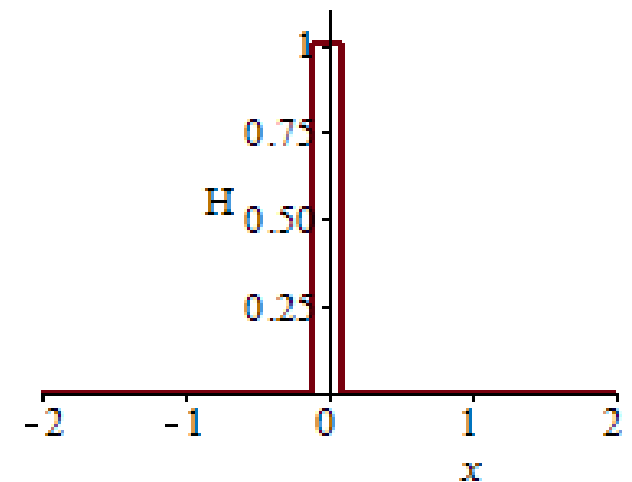
# Dispositifs expérimentaux

Pendule de Doubochinski (1968).



En M : aimant.  
En O : bobine d'axe horizontal.

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\alpha| \leq h \\ 0 & \text{si } |\alpha| > h \end{cases}$$



# Dispositifs expérimentaux

Pendule de Doubochinski (1968).

Capteur  
angulaire

Tige

Interface  
PC

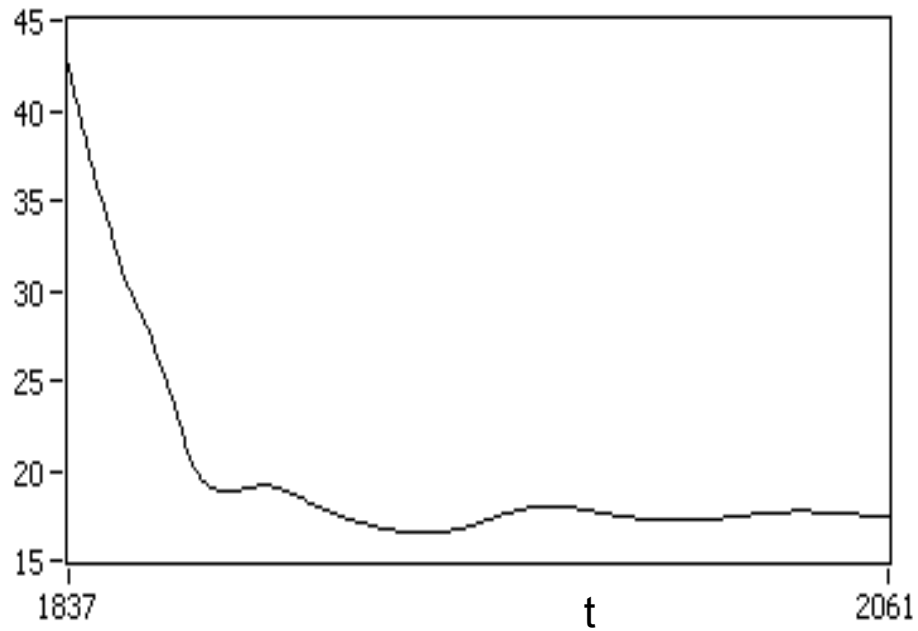


Bobine

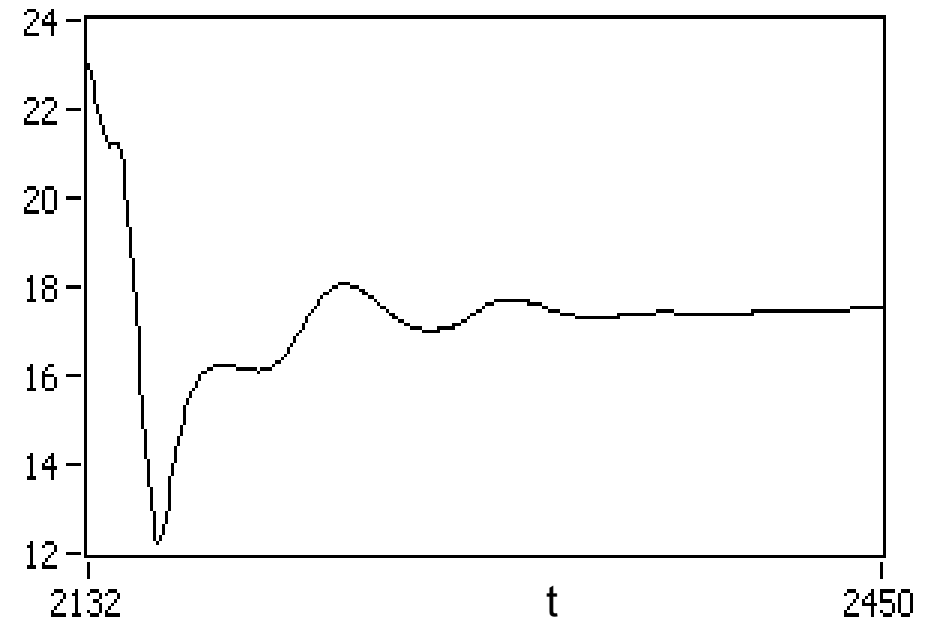
# Dispositifs expérimentaux

## Résultats

a (degrés)



a (degrés)



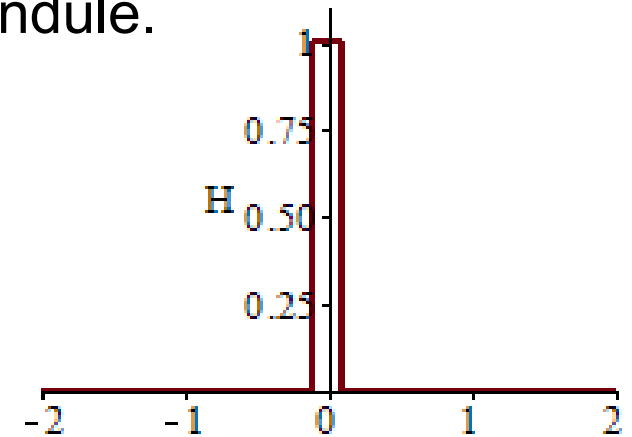


# Dispositifs expérimentaux

Pendule de Doubochinski (1968).

La fonction H dans le cas de ce pendule.

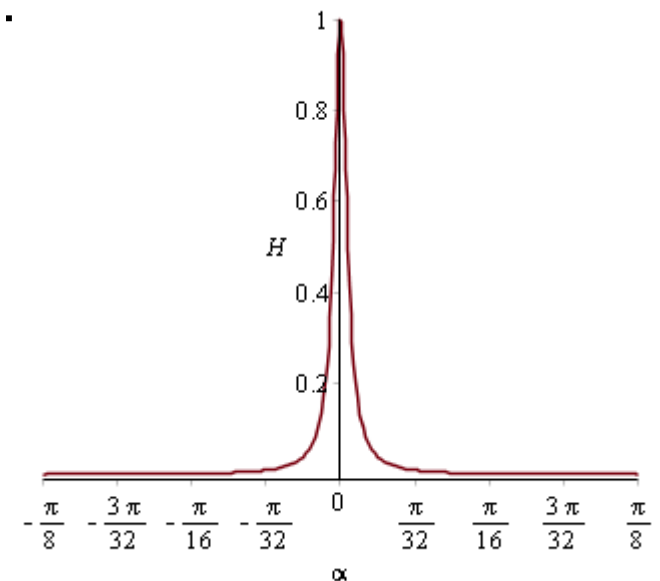
Fonction « historique » :  $H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\alpha| \leq h \\ 0 & \text{si } |\alpha| > h \end{cases}$



Notre fonction « pendule modifié » (plus régulière) :

$$H(\alpha) = \frac{1}{1 + \gamma \alpha^2}$$

avec  $\gamma = \frac{R(R+d)}{d^2}$



Autres formes de fonction H possibles  
en changeant l'orientation de la bobine.

# Le mécanisme physique en jeu.

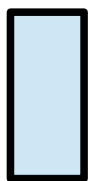
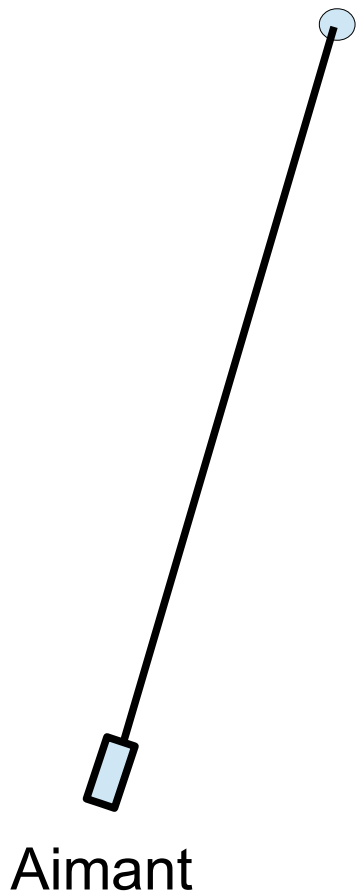
Exemple du pendule de Doubochinski.

La bobine produit un champ magnétique, qui exerce une force et un couple sur l'aimant, donc un couple sur la tige du pendule.

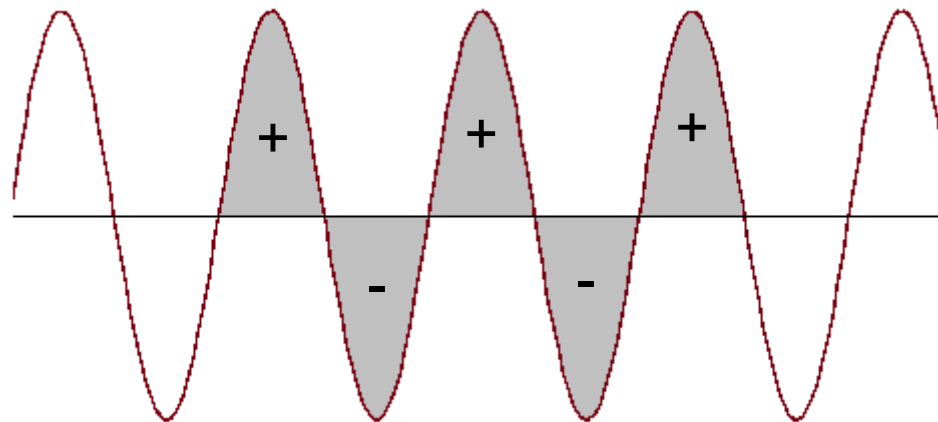
Zone d'interaction.

Bilan de l'énergie reçue par le pendule.

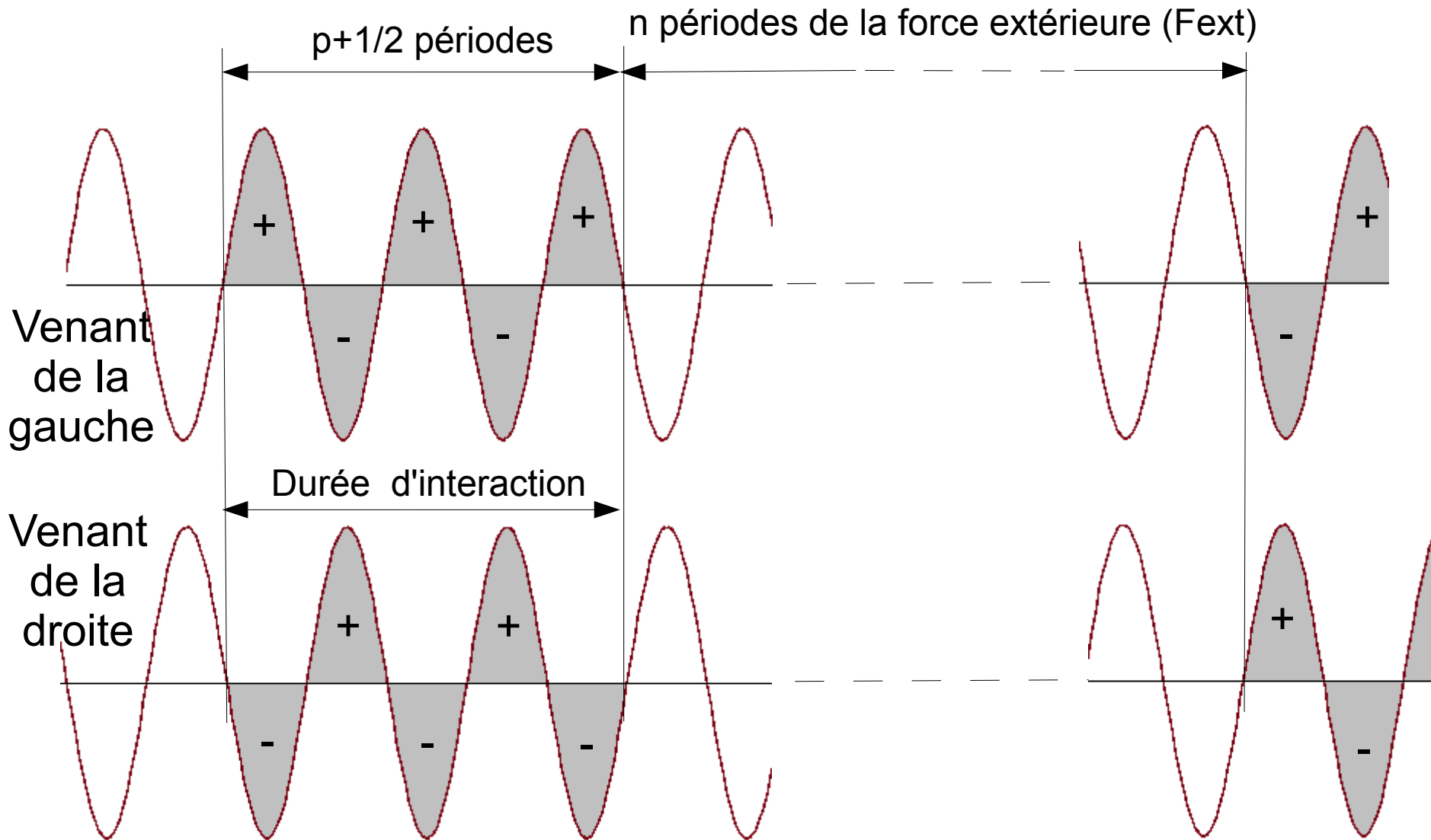
Par convention : « + » : force vers la droite.



Bobine



# Le mécanisme physique en jeu.



Bilan :  $n+p+1/2$  périodes de  $F_{ext}$  pour  $1/2$  période du pendule, donc  $2k+1$  périodes de  $F_{ext}$  pour 1 période du pendule.

# Solution approchée par la méthode de centrage (KBM) Krylov, Bogoliubov, Mitropolski (1959)

Observation du phénomène physique



on cherche une solution de l'équation  
canonique sous la forme :

$$x(\tau) = a(\tau) \sin(\omega \tau + \varphi(\tau))$$

avec  $a(\tau)$  et  $\varphi(\tau)$  = amplitude et phase de  $x$ , à variation lente.

et  $\omega = \rho \omega_0$  = paramètre fixe pendant les calculs.

# Forme nécessaire pour permettre le centrage

Pour permettre le centrage, l'équation canonique doit être sous la forme :

$$\frac{d^2 x}{d \tau^2} + x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{d \tau}, \tau\right)$$

avec  $|\varepsilon| \ll 1$ .

Nous prenons :

$$\frac{d^2 x}{d \tau^2} + x = A H(x) \sin\left(\frac{\nu}{\omega_0} \tau\right) - 2 \beta \frac{dx}{d \tau} - \mu x^3$$

avec  $|A| \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$  et  $|\mu| \ll 1$ .

# Objectif du centrage

Obtenir un système d'équations autonome  
et plus simple à étudier.

2 étapes :

- 1 - Transformer l'équation canonique pour obtenir un système standard.
- 2 - Moyenner les équations par rapport au temps.

# 1ère étape du centrage

Transformer l'équation canonique pour obtenir un système standard.

Changement de variables :  $(x, \frac{dx}{d\tau}) \longrightarrow (a, \varphi)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \sin(\rho \tau + \varphi) \\ \frac{dx}{d\tau} = a \rho \cos(\rho \tau + \varphi) \end{array} \right. + \text{conditions initiales.}$$

On obtient, avec  $\theta = \rho \tau + \varphi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{d\tau} = \frac{\cos(\theta)}{\rho} (-\mu a^3 \sin^3(\theta) + AH(a \sin(\theta)) \sin(\frac{\nu}{\omega_0} \tau) - 2\beta \rho a \cos(\theta) + a \sin(\theta)(\rho^2 - 1)) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\sin(\theta)}{\rho a} (\mu a^3 \sin^3(\theta) - AH(a \sin(\theta)) \sin(\frac{\nu}{\omega_0} \tau) + 2\beta \rho a \cos(\theta) - a \sin(\theta)(\rho^2 - 1)) \end{array} \right.$$

## 2ème étape du centrage

Moyenner par rapport au temps.

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\cos(\theta)}{\rho} \left( -\mu a^3 \sin^3(\theta) + AH(a \sin(\theta)) \sin\left(\frac{\nu}{\omega_0} \tau\right) - 2\beta \rho a \cos(\theta) + a \sin(\theta)(\rho^2 - 1) \right)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\sin(\theta)}{\rho a} \left( \mu a^3 \sin^3(\theta) - AH(a \sin(\theta)) \sin\left(\frac{\nu}{\omega_0} \tau\right) + 2\beta \rho a \cos(\theta) - a \sin(\theta)(\rho^2 - 1) \right)$$

On utilise le développement en série de Fourier de la fonction  $H(a \sin(\theta))$  (ici, exemple de fonction paire) :

$$H(a \sin(\theta)) = \sum_0^{+\infty} c_q \cos(2q\theta) \quad \text{et} \quad c_q = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(a \sin(\xi)) \sin(q\xi) d\xi$$



# 2ème étape du centrage

Moyenner par rapport au temps.

Alors, si  $\frac{\nu}{\rho \omega_0}$  est un entier impair  $n$  :

$$\text{Système centré} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{d\tau} = -\frac{A}{4\rho} S(a) \sin(n\varphi) - \beta a \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\rho^2 - \rho_n^2}{2\rho_n} - \frac{A}{4a\rho_n} D(a) \cos(n\varphi) \end{array} \right.$$

$$\text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{n-1}{2}, p = \frac{n+1}{2}, S = c_m + c_p, D = c_m - c_p \\ \rho^2 = 1 + \frac{3\mu}{4} a^2, \rho_n^2 = \left(\frac{1}{n} \frac{\nu}{\omega_0}\right)^2 \end{array} \right.$$

$$\text{Sinon :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{d\tau} = -\beta a \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\rho^2 - \rho_n^2}{2\rho_n} \end{array} \right.$$

# Exemples de fonctions $S(a)$

Doubochinski historique :

$$S(a) = -\frac{4}{\prod m(m+1)} \cos\left(\frac{na}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{2}\right) \left(n \tan\left(\frac{na}{2}\right) - \tan\left(\frac{a}{2}\right)\right)$$

Doubochinski modifié :

$$S(a) = K(a, \gamma, 2m) + K(a, \gamma, 2p)$$

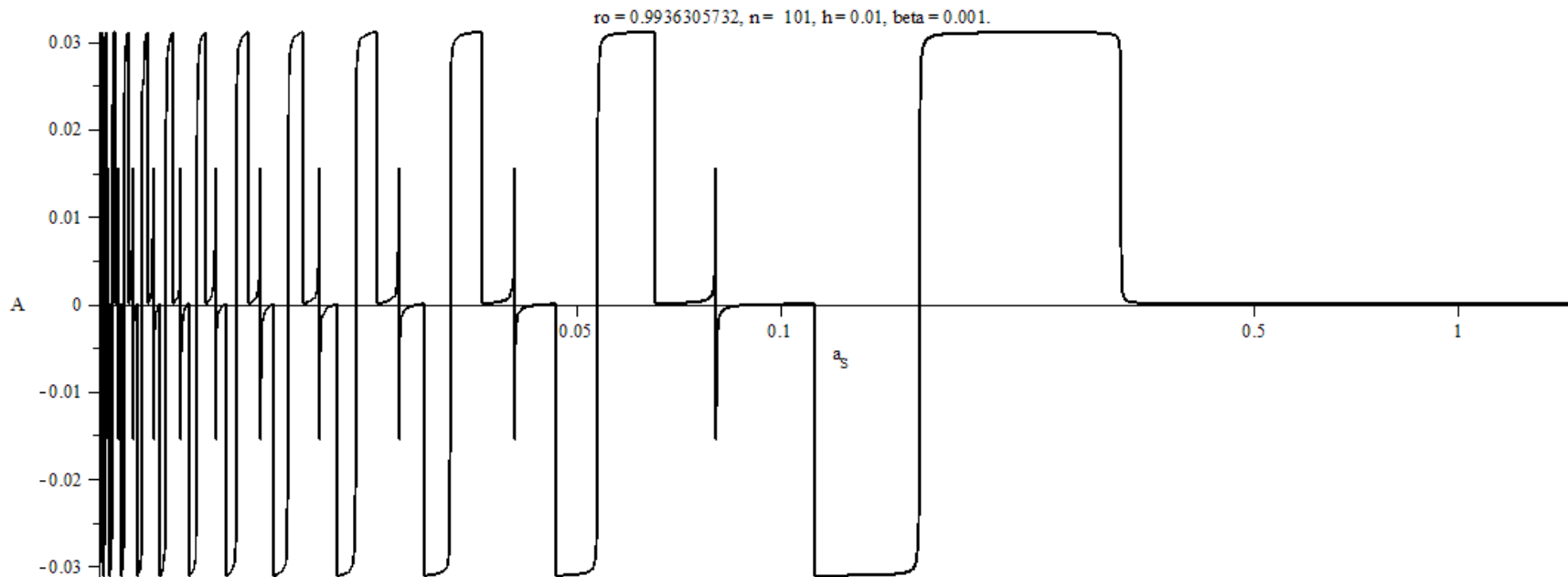
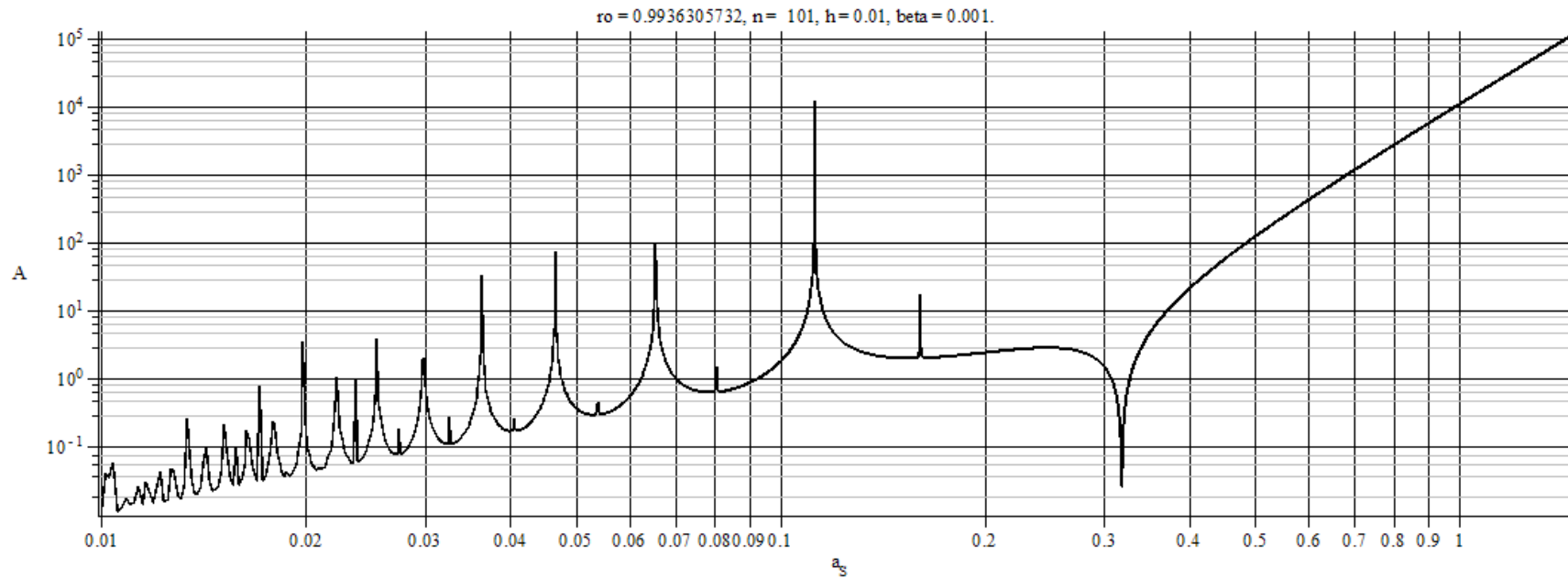
$$\text{avec } \begin{cases} K(a, \gamma, q) = \frac{2}{\sqrt{1+\gamma a^2}} \left(\frac{1-\sqrt{1+\gamma a^2}}{\sqrt{\gamma} a}\right)^q \\ m = \frac{n-1}{2}, p = \frac{n+1}{2} \end{cases}$$

# Solution stationnaire

$$\text{Amplitude : } A = 4 \frac{a_s}{S(a_s)} \sqrt{(\rho_n \beta)^2 + \frac{9}{64} \mu^2 \left( \frac{S(a_s)}{D(a_s)} \right)^2 (a_s^2 - a_n^2)^2}$$

$$\text{Phase : } \tan(n \phi_s) = -\frac{8 \beta}{3 \mu} \frac{\rho_n}{a_s^2 - a_n^2} \frac{D(a_s)}{S(a_s)}$$

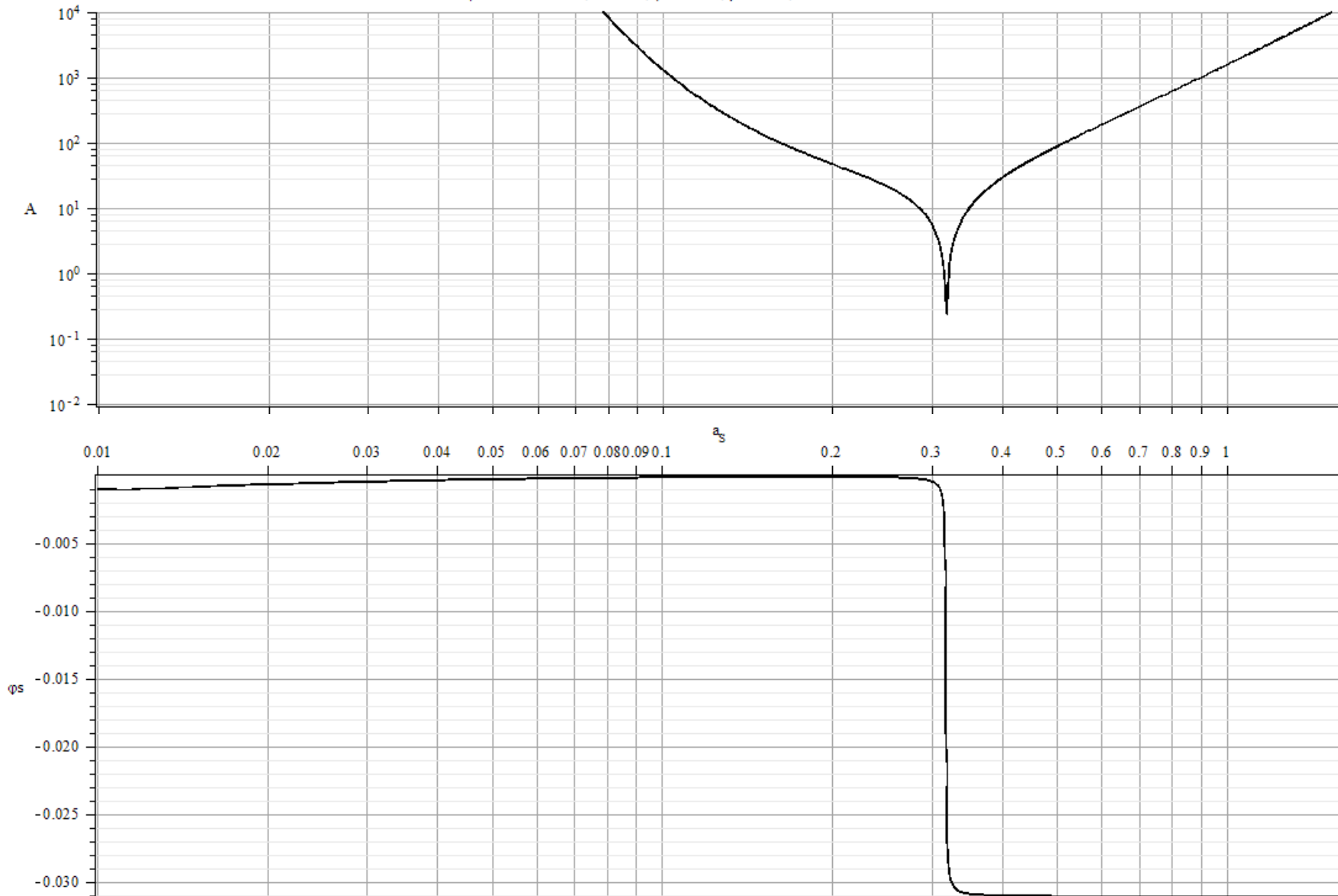
# Aspect des courbes $A(a_s)$ et $\varphi(a_s)$ en solution stationnaire



Doub.  
historique

# Aspect des courbes $A(a_s)$ et $\varphi(a_s)$ en solution stationnaire

$\rho = 0.9936305732$ ,  $n = 101$ ,  $\gamma = 10100$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $S\text{-choice} = 0$ .



Doub.  
modifié

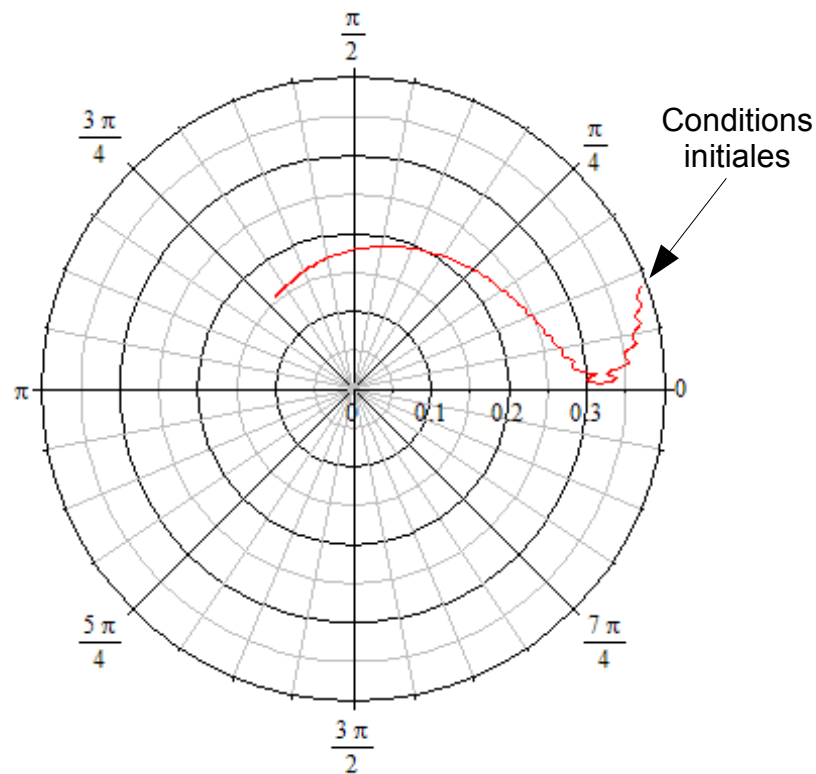
# Représentation de l'état du système

Adaptée à notre problème : plan de van der Pol.

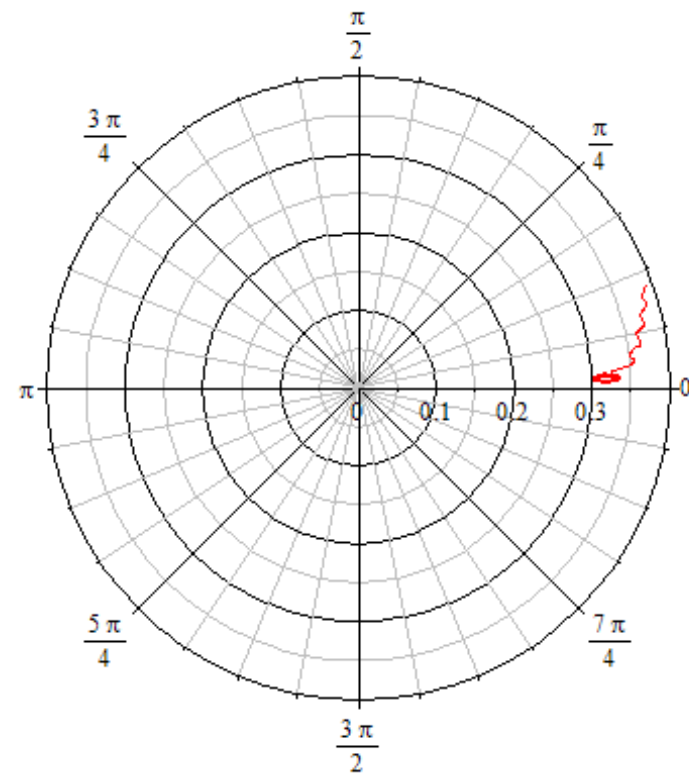
Amplitude  $a$  en abscisse, phase  $\varphi$  en ordonnée.

Également en coordonnées polaires.

Courbes intégrales typiques :



Pas de capture.



Capture.

# Simulation numérique : $a_0$ constant, $\varphi_0$ variable, $n=7$

(Fehlberg 4-5<sup>th</sup> order Runge-Kutta).

Image n° 1,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{2}{49} \pi$

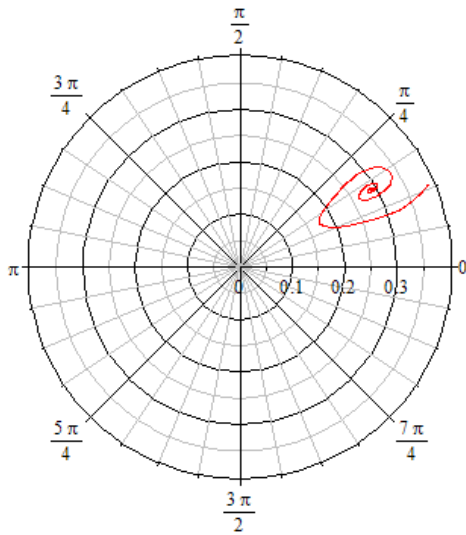


Image n° 2,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{36}{539} \pi$

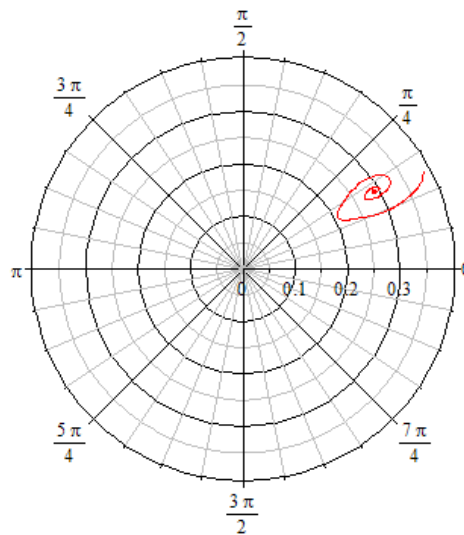


Image n° 3,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{50}{539} \pi$

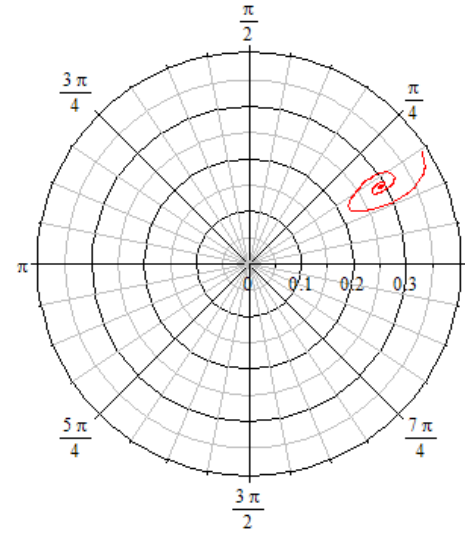


Image n° 4,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{64}{539} \pi$

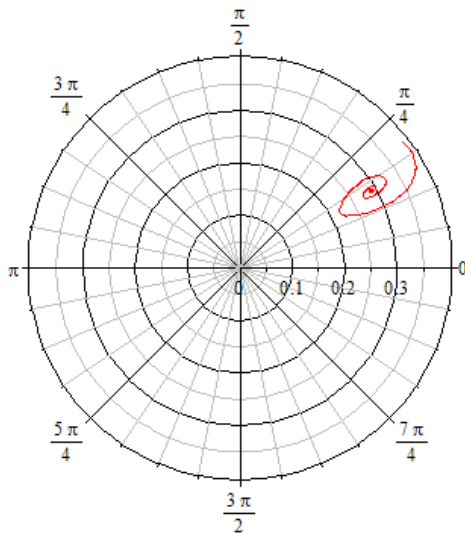


Image n° 5,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{78}{539} \pi$

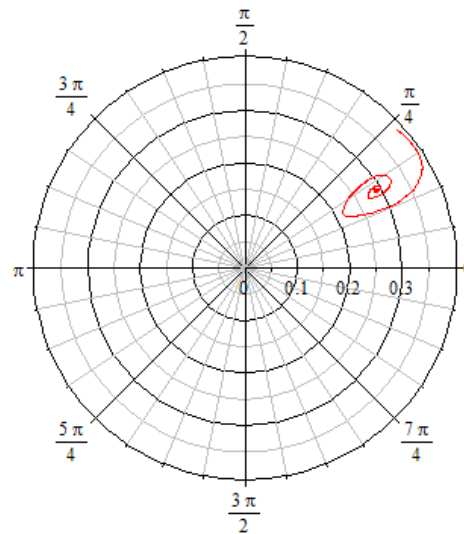
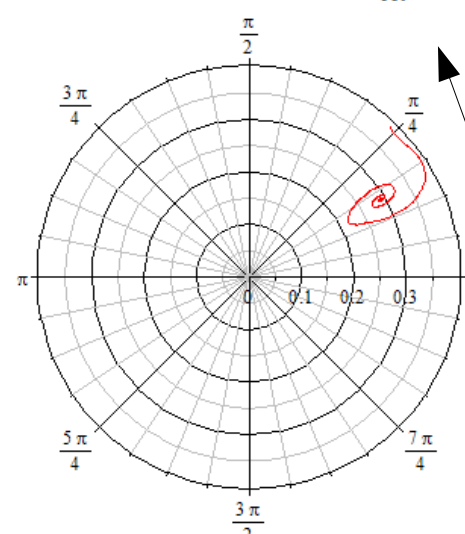


Image n° 6,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{92}{539} \pi$



Coordonnées polaires  $(a, \varphi)$ .



# Simulation numérique : $a_0$ constant, $\varphi_0$ variable, $n=7$

(Fehlberg 4-5<sup>th</sup> order Runge-Kutta).

Image n° 7,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{106}{539} \pi$

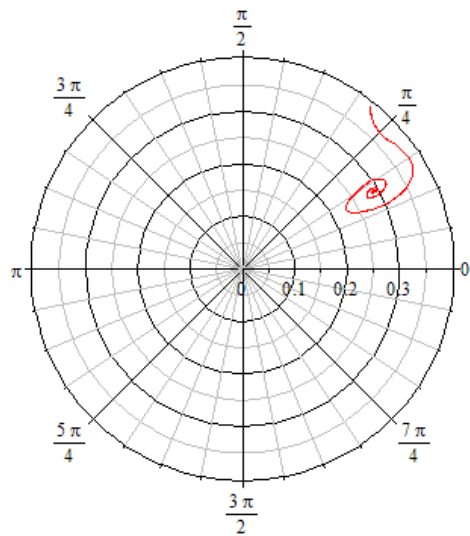


Image n° 8,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{120}{539} \pi$

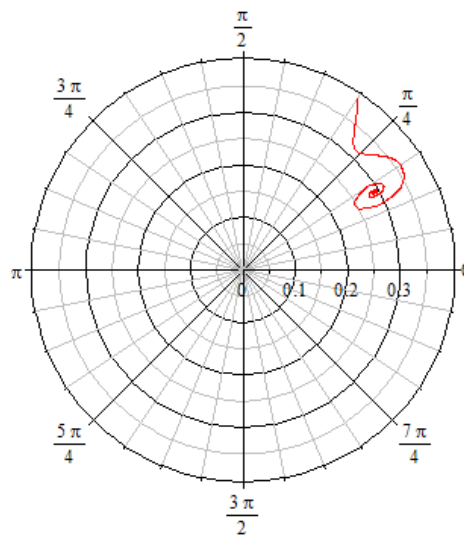


Image n° 9,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{134}{539} \pi$

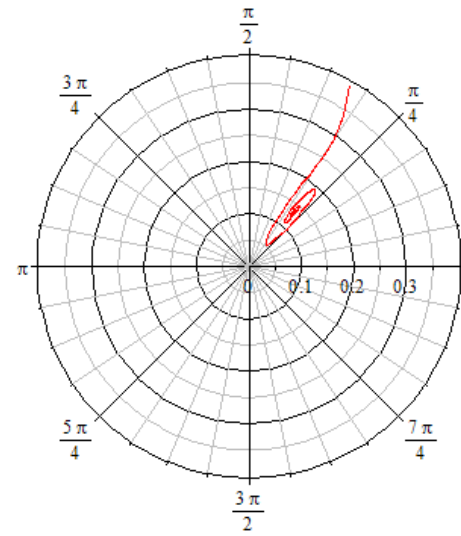


Image n° 10,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{148}{539} \pi$

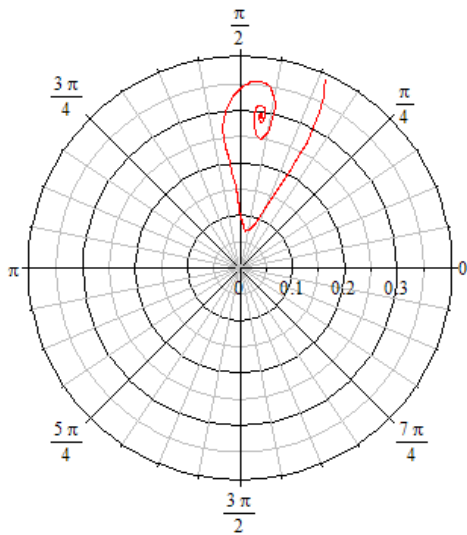


Image n° 11,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{162}{539} \pi$

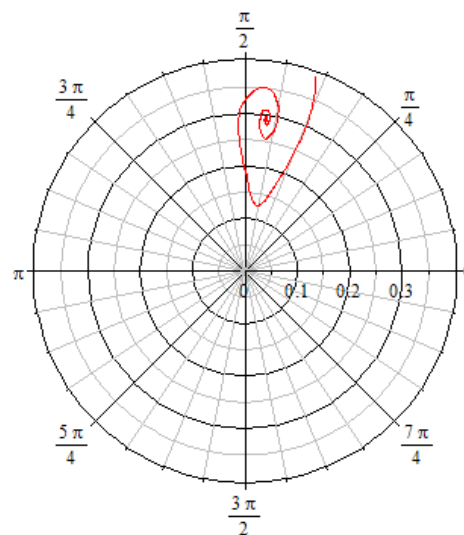
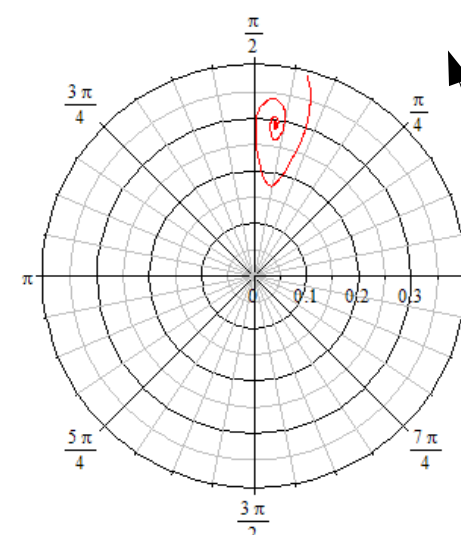


Image n° 12,  $a=0.3929$ ,  $\varphi_0 = 0.2796 + \frac{16}{49} \pi$



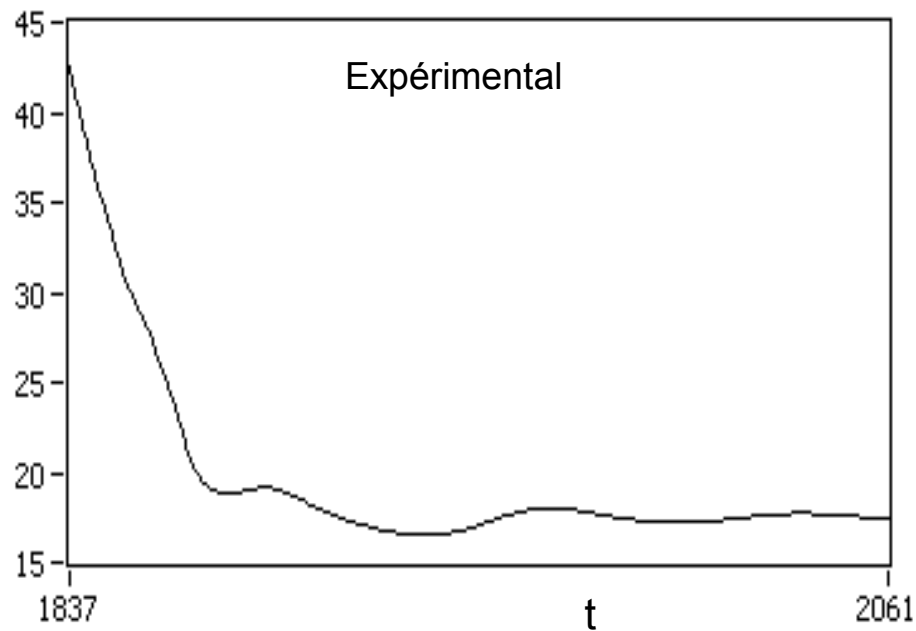
Coordonnées polaires  
( $a$ ,  $\varphi$ ).



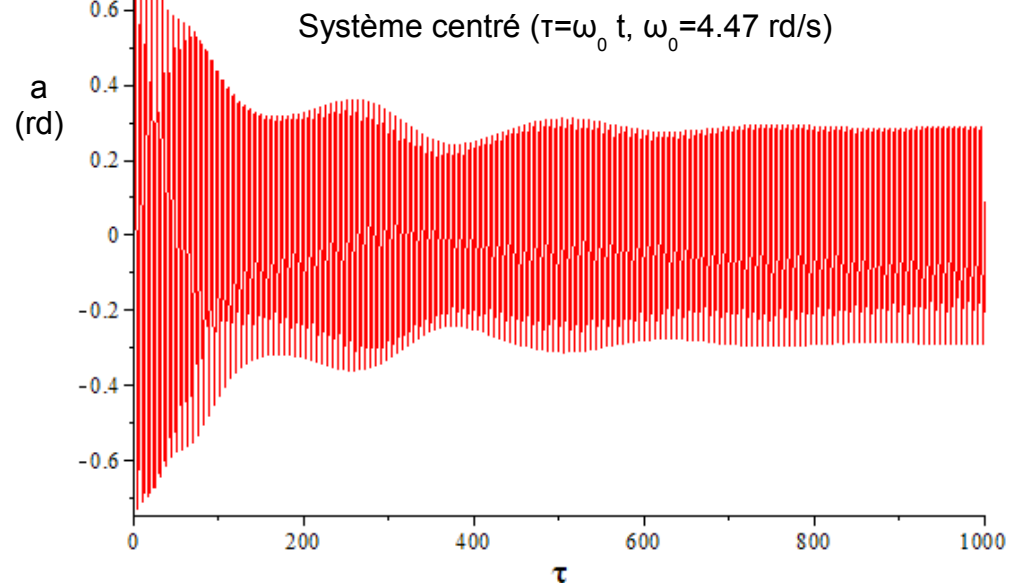
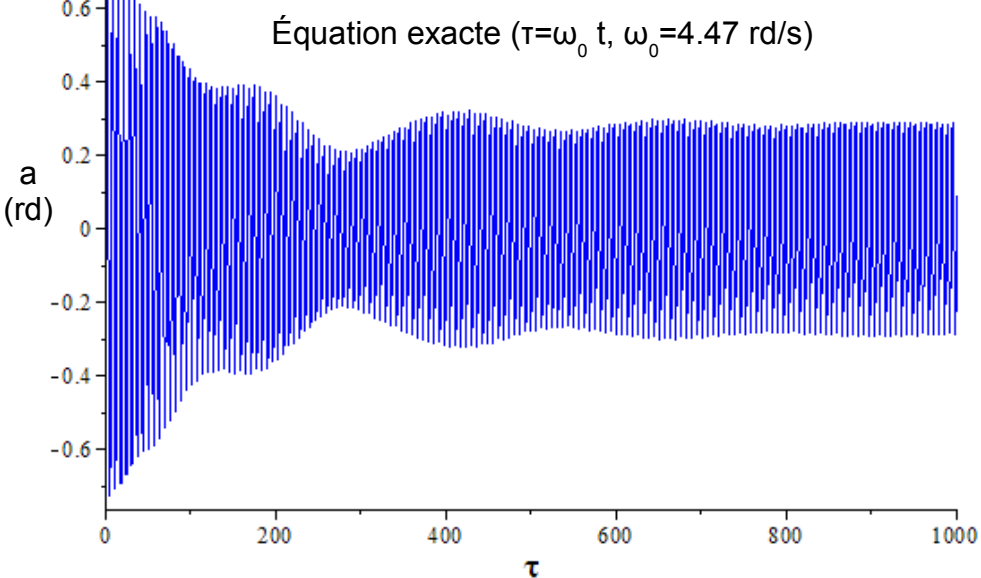
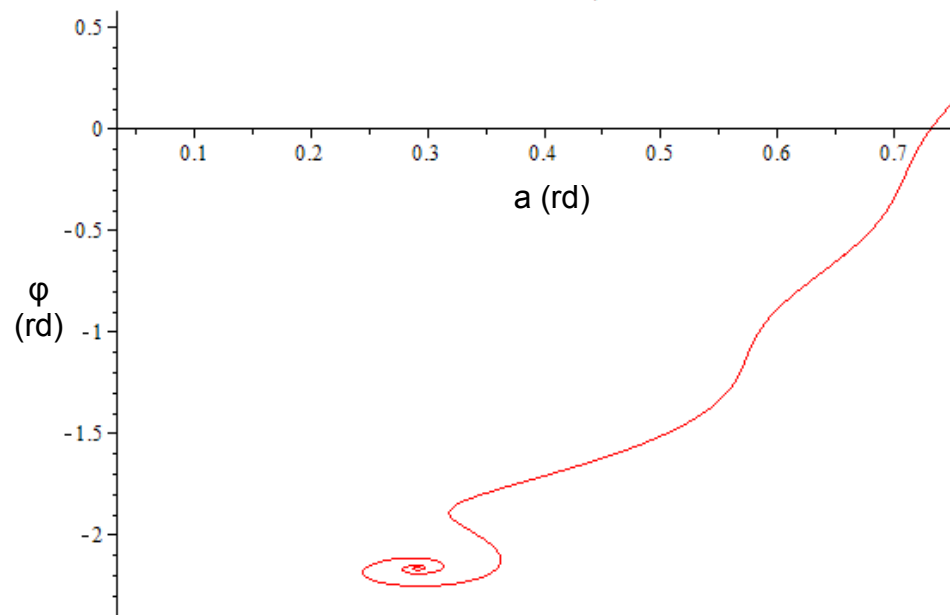


# Comparaison avec les résultats expérimentaux

a (degrés)

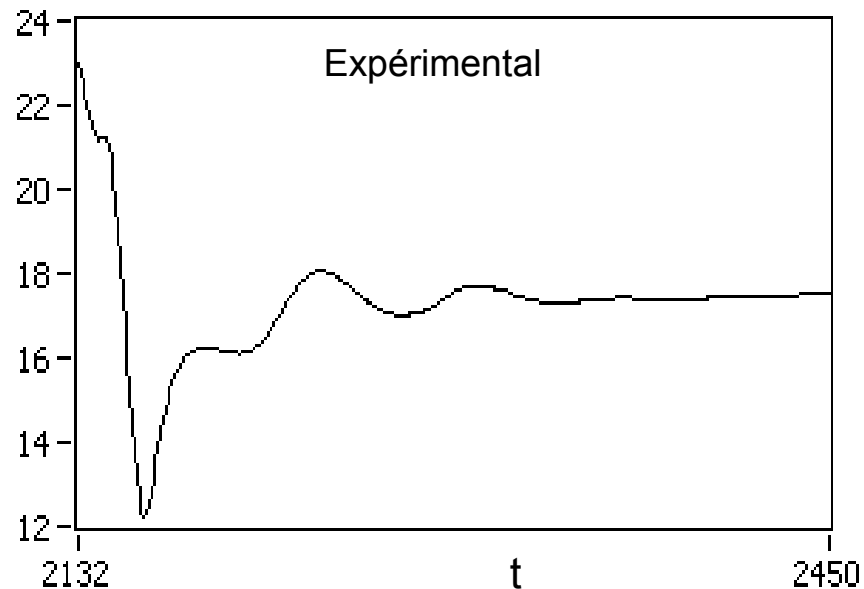


$$a_0 = 0.75, \varphi_0 = -0.319 + \frac{1}{7} \pi$$

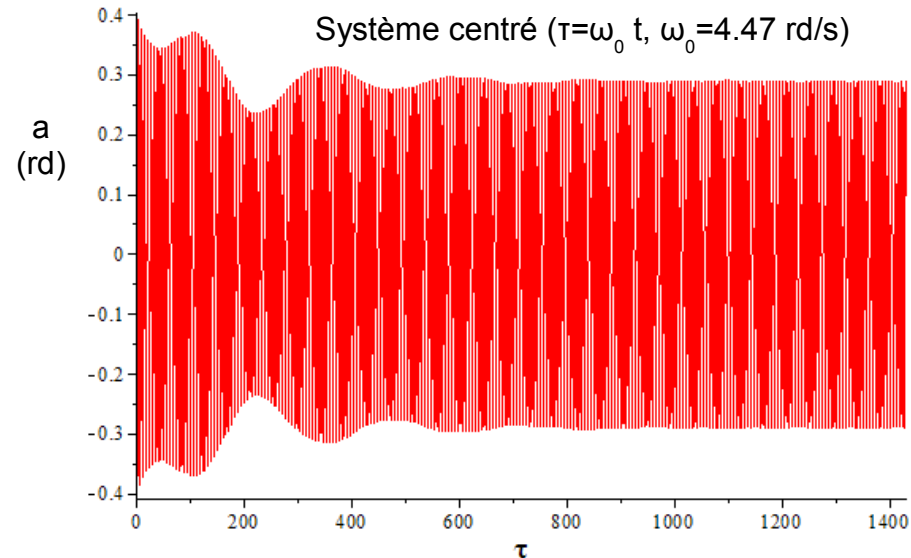
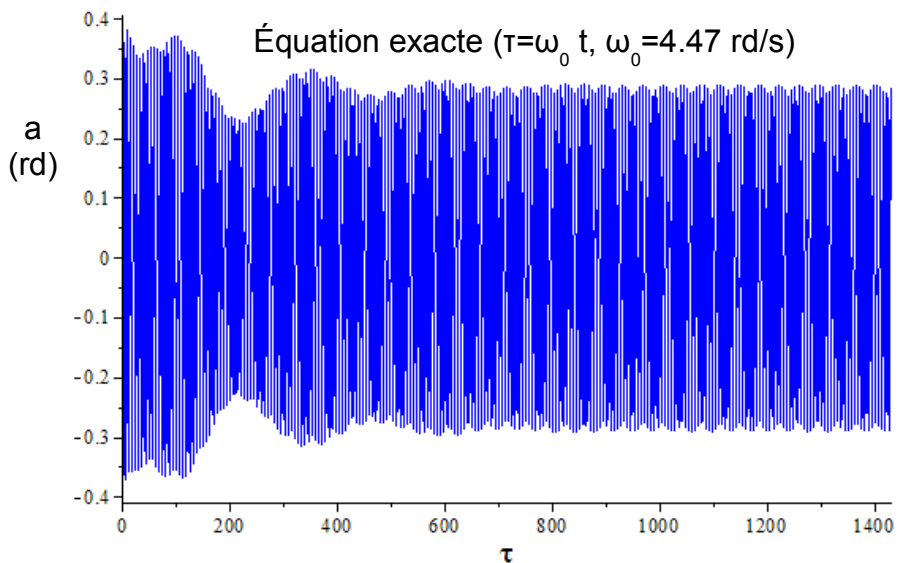
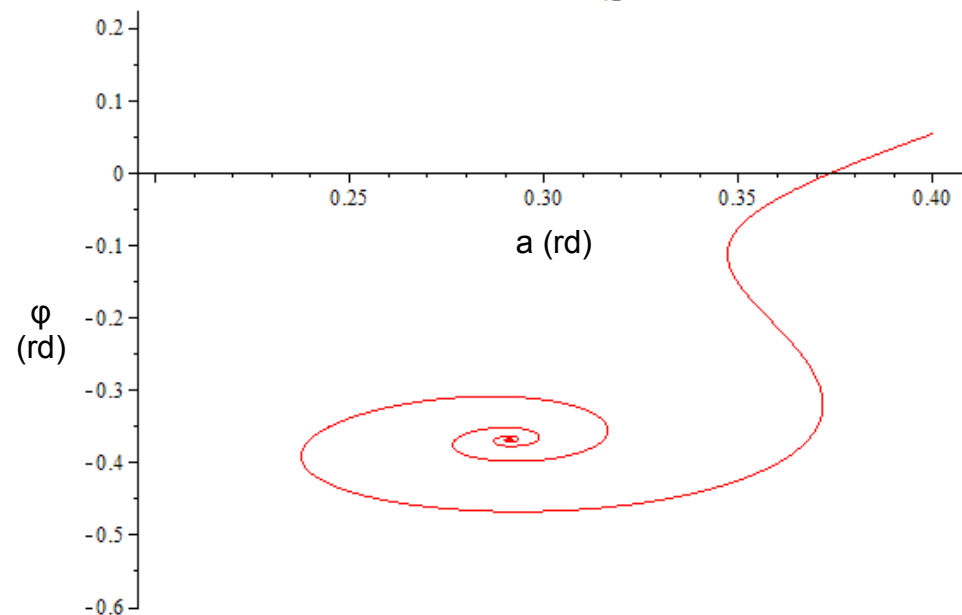


# Comparaison avec les résultats expérimentaux

a (degrés)



$$a_0 = 0.4, \quad \varphi_0 = -0.319 + \frac{5}{42} \pi$$



# Conclusion

Ce qui a été fait :

- Montage d'une expérience (matériel + logiciel LabVIEW) de type Doubochinski ; phénomène physique mis en évidence.
- Pour les cas Béthenod et Doubochinski :
  - calcul des forces en présence,
  - établissement des équations du second ordre et centrage,
  - calcul des fonctions  $H$  et des coefficients  $c_q$  sous forme symbolique.
- Étude en symbolique de la stabilité.
- Représentation dans le plan de van der Pol.

Ce qui reste à faire :

- Simplification des expressions concernant la stabilité.
- Aspects énergétiques.
- Étude en symbolique des conditions de capture par l'attracteur.
- Montage d'une expérience de type Béthenod.
- Étude en symbolique des marges d'erreur de la méthode de centrage.
- Étude théorique et expérimentale d'un système à plus d'un DDL.
- Généralisation à une classe de systèmes physiques.

**Merci de votre attention.**