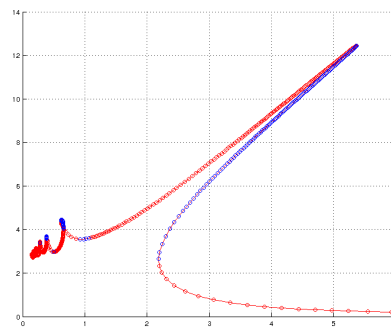
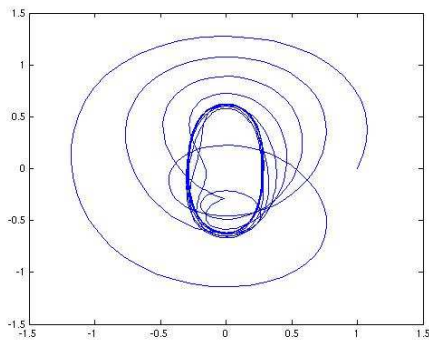


Méthode de shooting et technique de continuation en dynamique non-linéaire

Sébastien BAGUET
INSA Lyon- LaMCoS



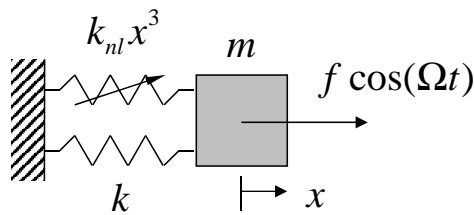
Plan

2

- I. **Intégration temporelle** des équations du mouvement
- II. **Solutions périodiques**
- III. **Shooting simple** – continuation séquentielle
- IV. **Shooting** – continuation par longueur d'arc

- **Forme générale** $\dot{z} = f_{NL}(z, t)$ **Équations du mouvement sous forme d'état**

- **Ex : Oscillateur de duffing forcé (1 ddl)**



non-linéarité cubique en raideur

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_{nl}x^3 = \tilde{f} \cos(\Omega t)$$

sous forme adimensionnée

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = f \cos(\Omega t)$$

sous forme d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\mu y - \omega_0^2 x - \alpha x^3 + f \cos(\Omega t) \end{cases}$$

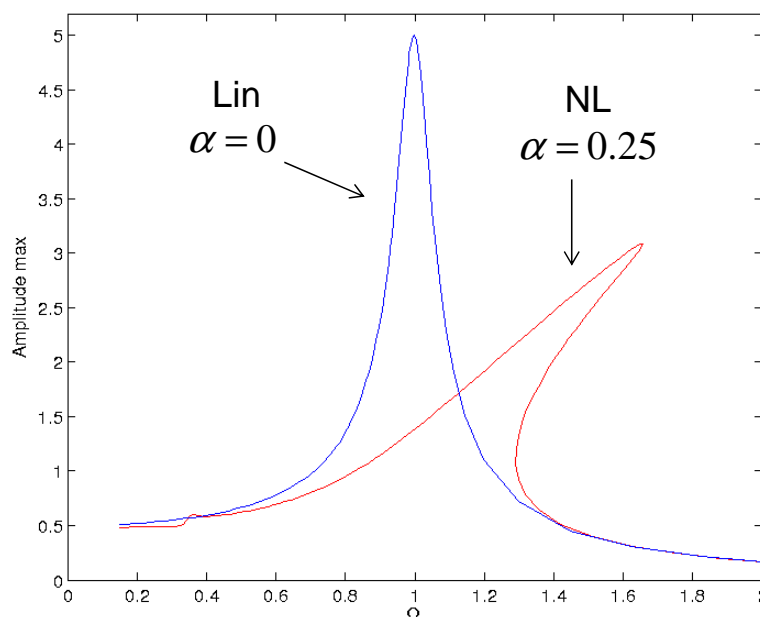
i.e. $\dot{z} = g(z, t)$ avec $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$ et $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix}$

Vecteur des variables d'état

conditions initiales

Oscillateur de duffing forcé (1 ddl)

Courbe de réponse



Intégration numérique des equations du mouvement avec Matlab (évolution au cours du temps)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\mu y - \omega_0^2 x - \alpha x^3 + f \cos(\Omega t) \end{cases} \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{z} = g(z, t) = \text{duffing}(z, t)$$

Définition du système sous forme d'état :

```
% Forced Duffing Oscillator
function zdot=duffing(t,z)
global mu omega alpha f OMEG
zdot(1)=z(2);
zdot(2)=-2*mu*z(2)-omega^2*z(1)-alpha*z(1)^3+f*cos(OMEG*t);
zdot=zdot';
end
```

Résultat

t	z
0	z(0)
dt	z(dt)
2dt	⋮
⋮	⋮
T _f	z(T _f)

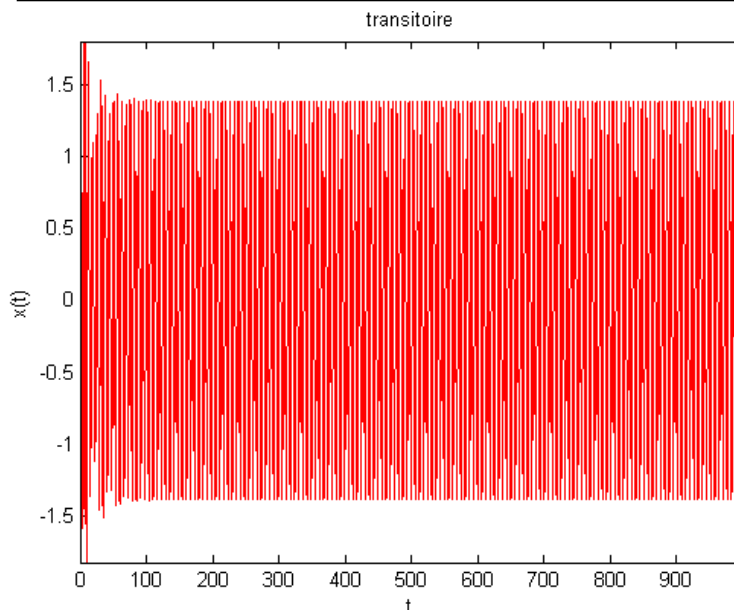
Intégration numérique (ODE Ordinary differential Equation)

```
z0=[0.5 0];
options = odeset('RelTol',1e-3);
[t z]=ode45(@duffing,0:0.05:1000,z0,options);
```

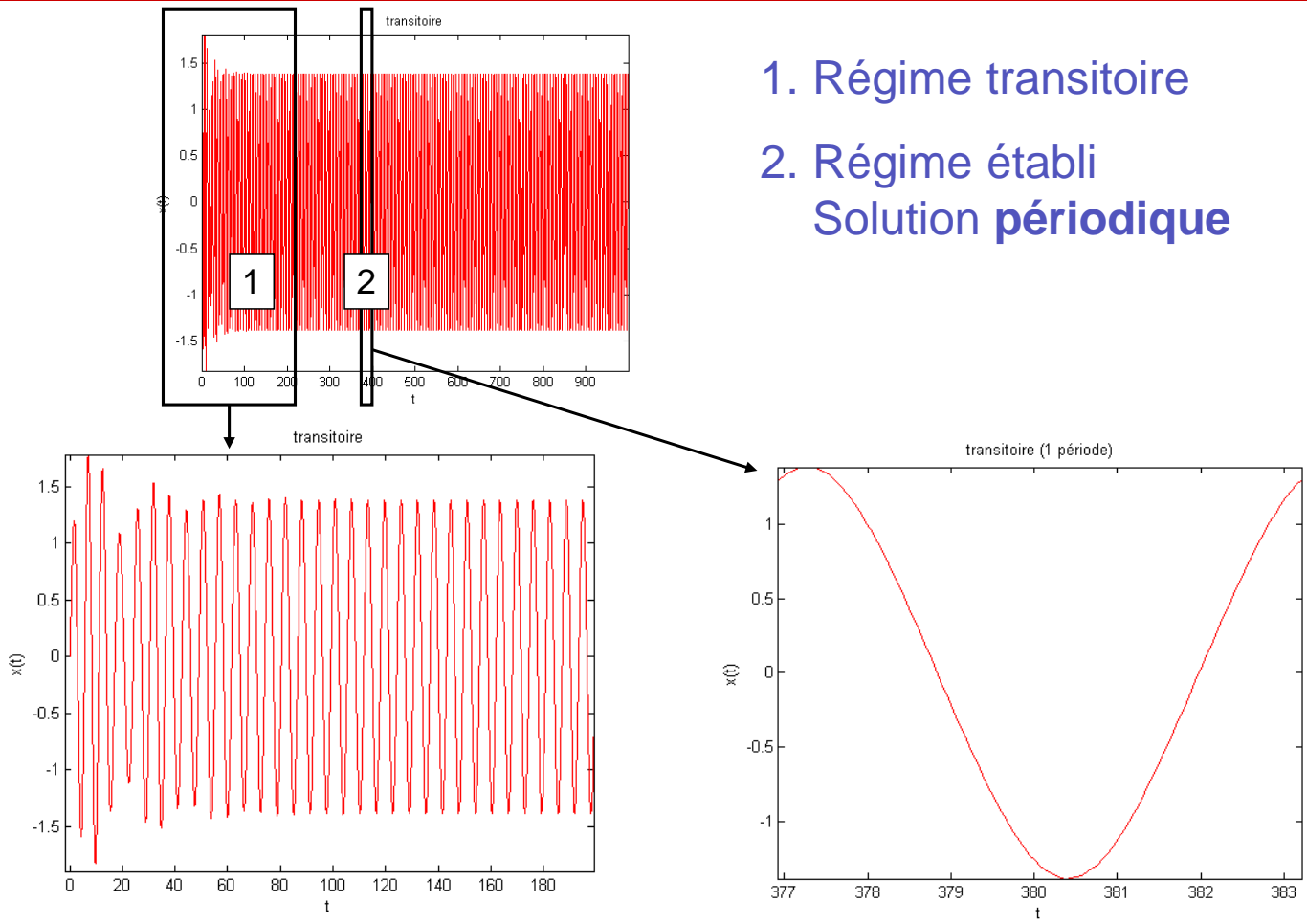
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\mu y - \omega_0^2 x - \alpha x^3 + f \cos(\Omega t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \mu = 0.05 & \omega_0 = 1 & \alpha = 0.25 \\ f = 0.5 & \Omega = 1 \end{matrix}$$

```
z0=[0.5 0];
options = odeset('RelTol',1e-3);
[t z]=ode45(@duffing,0:0.05:1000,z0,options);
```

z₀ = z(0)
conditions initiales à t=0



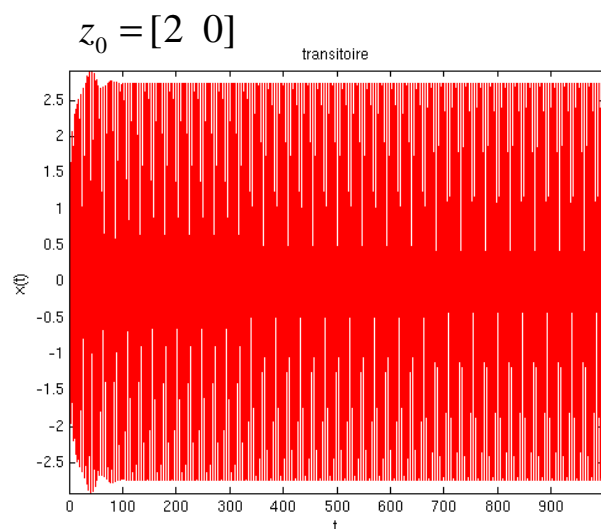
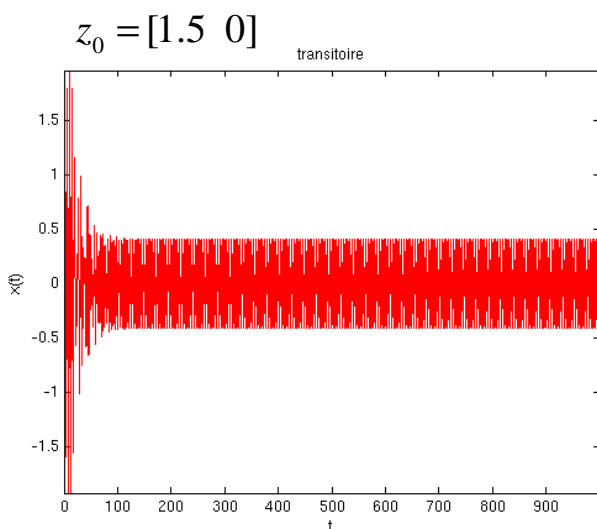
Duffing_transit_ome_fixe.m



Sensibilité aux conditions initiales, multiplicité des solutions

- Le **régime transitoire** change en fonction des conditions initiales
- La **solution périodique** (régime établi) peut changer en fonction des conditions initiales car le système est non-linéaire

Exemple : $\Omega = 1.5$ $x_{\max} = 0.4$ ou 2.7 selon les C.I. choisies



- I. Intégration temporelle des équations du mouvement
- II. Solutions périodiques
- III. Shooting simple – continuation séquentielle
- IV. Shooting – continuation par longueur d'arc

Shooting et Continuation – S. Baguet – GDR DYNOLIN 14/10/2015

II – Solutions périodiques

10

$$\dot{z} = g(z, t) \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

La solution dépend
des C.I. !!!

Solutions $z = z(t) = z(z_0, t)$ avec $z_0 = z(0)$ conditions initiales à $t=0$

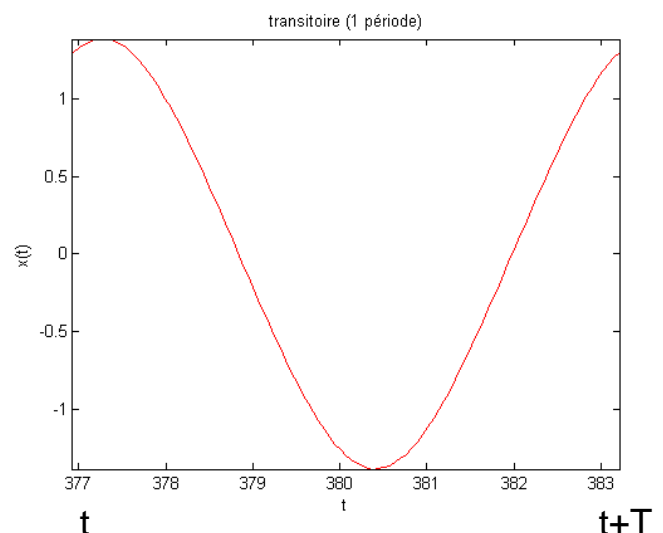
Hypothèse Sollicitation harmonique
Réponse harmonique de même période

Solutions périodiques
= solutions telles que

$$z(z_0, t + T) = z(z_0, t)$$

T : période de la solution

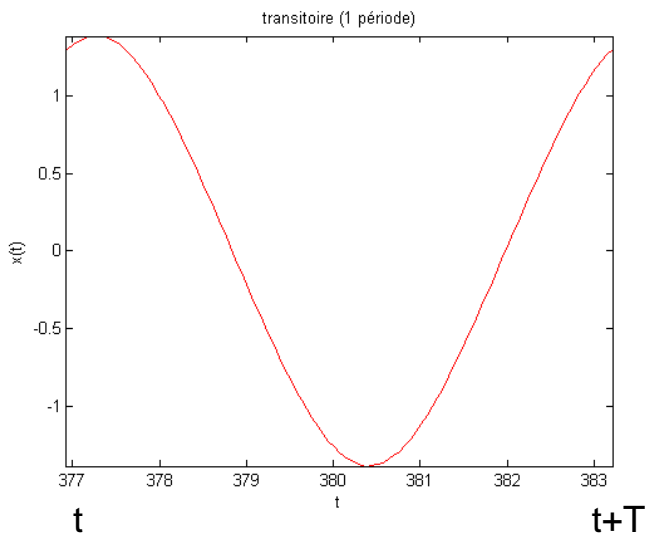
$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$



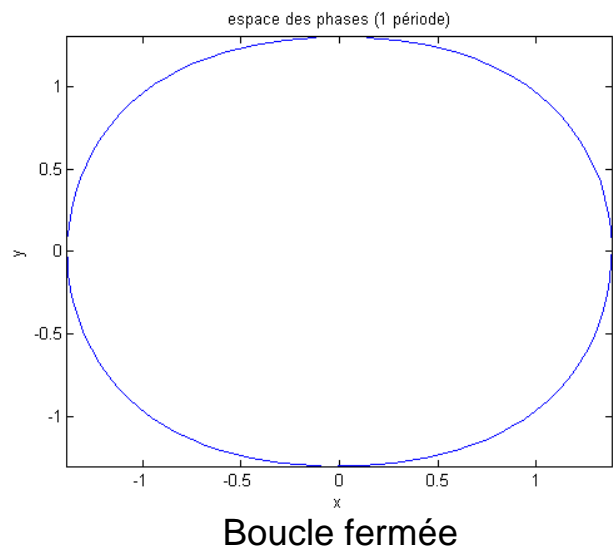
Propriétés des solutions périodiques

$$z(z_0, t+T) = z(z_0, t) \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ \dot{x}(t+T) = \dot{x}(t) \end{cases}$$

Réponse temporelle $x(t)$



Espace des phases – Tracé $x(t) - \dot{x}(t)$

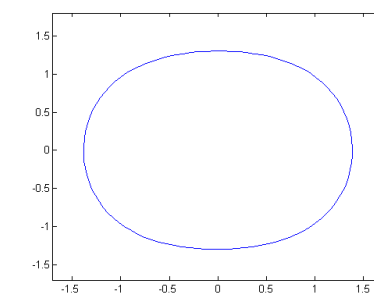
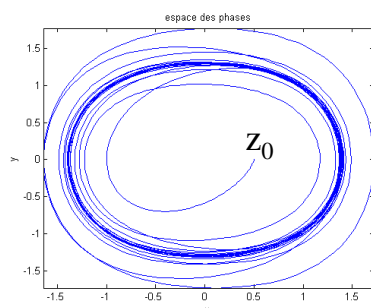
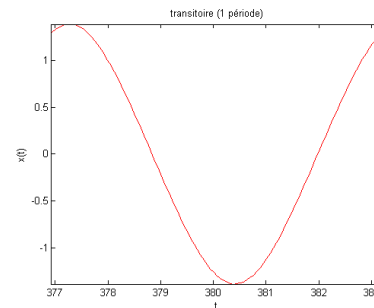
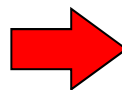
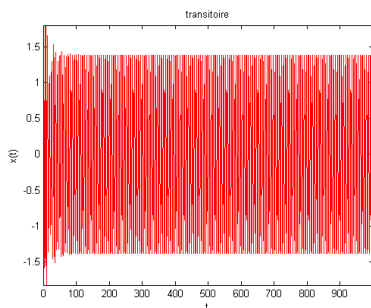


II – Calcul des solutions périodiques

1 – Méthode 1 : méthode « brutale »

- Intégration temporelle jusqu'au régime périodique
- On isole la solution sur une période

Duffing_transit_ome_fixe.m

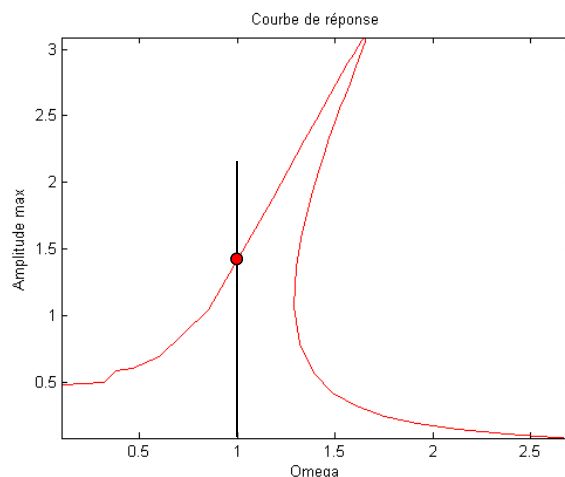
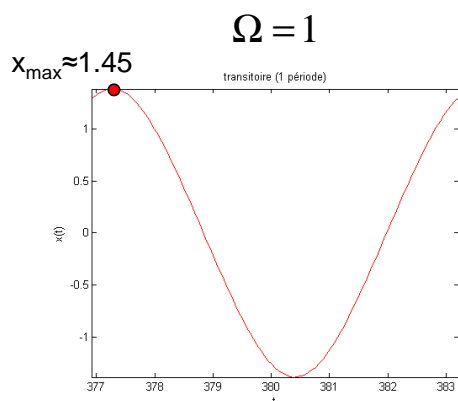


1 – Méthode « brutale »

Courbe de réponse

- En général, on s'intéresse à la **courbe de réponse** du système, i.e. la courbe Amplitude/Fréquence ou Amplitude/Pulsation
- Pour l'obtenir, on fait varier Ω .
- Pour chaque valeur de Ω , on calcule la solution périodique, puis l'amplitude max sur la période obtenue.

$\mu = 0.05 \quad \omega_0 = 1 \quad \alpha = 0.25 \quad f = 0.5$



II – Calcul des solutions périodiques

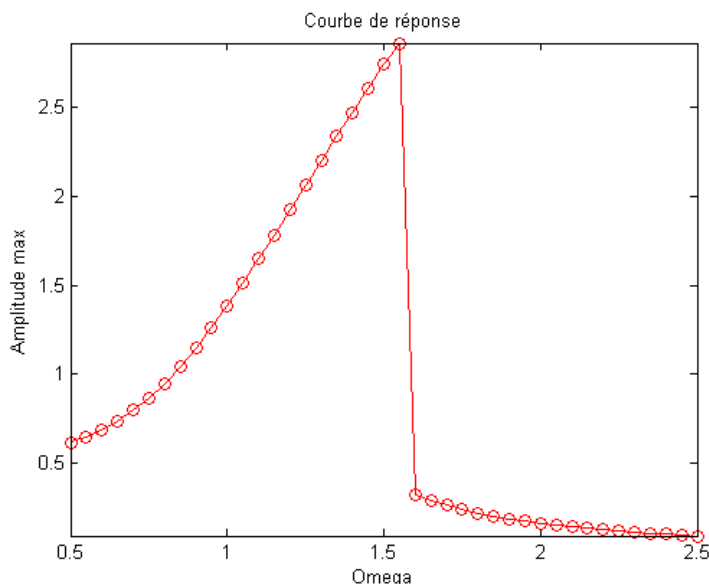
1 – Méthode « brutale »

Duffing_transit.m

```
% parametres du duffing
mu=0.1/2;omega=1;alpha=0.25;f=.5;
OMEGA_debut=.5;OMEGA_fin=2.5;dOMEGA=0.05;
nbpas_per=40;
% conditions initiales
z0=[0.5 0];
k=0; OMEG=OMEGA_debut;
```

```
% boucle sur Omega
while (OMEG<OMEGA_fin)
    OME(k+1)=OMEG;
    periode=2*pi/OMEG;
    dt=periode/nb_pas_per;
% calcul de z(t)
    [t z]=ode45(@duffing,0:dt:2000,z0);
% recherche de l'amplitude max
    W(k+1)=max(z(end-200:end,1));
    z0=[z(end,1) z(end,2)];
    OMEG=OMEG+dOMEGA;
    k=k+1;
end
plot(OME,W,'r-o')
```

Phénomène de saut
au niveau du point
limite



- I. Intégration temporelle des équations du mouvement
- II. Solutions périodiques
- III. Shooting simple – continuation séquentielle
- IV. Shooting – continuation par longueur d'arc

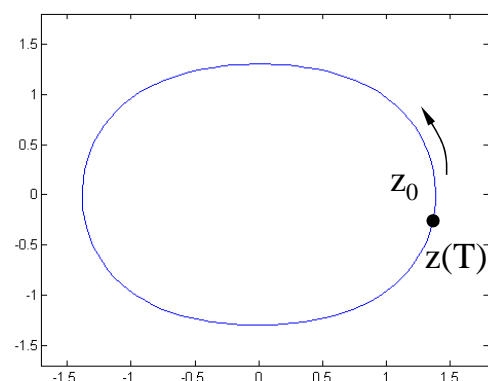
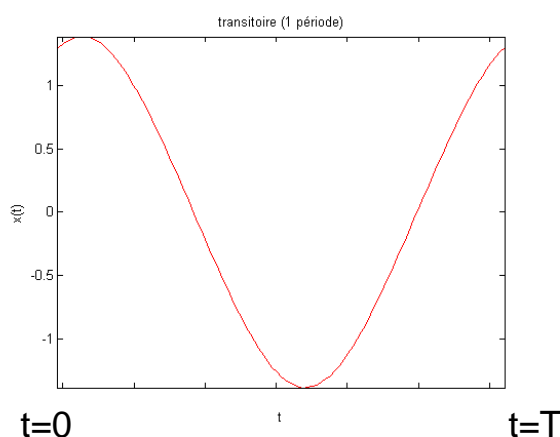
II – Calcul des solutions périodiques

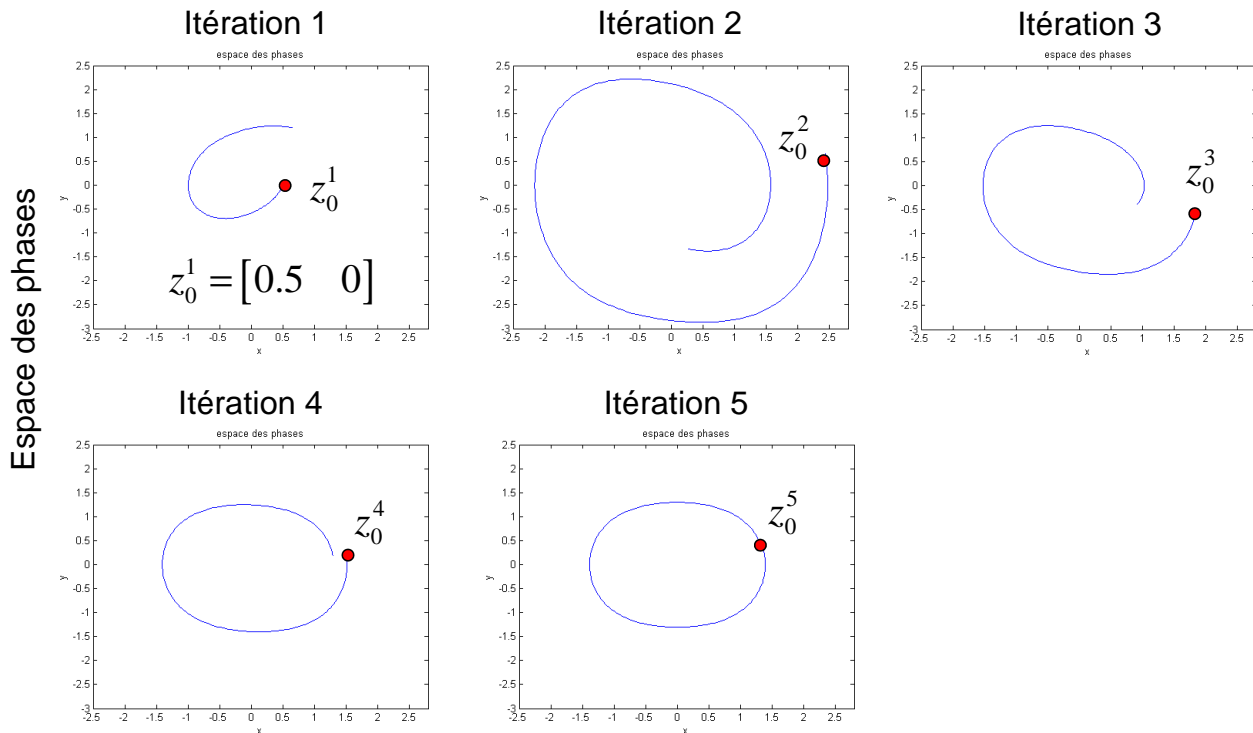
2 – Méthode 2 : Shooting

- On cherche z_0 tq $z(z_0, t=T) = z_0$

i.e. on cherche à démarrer avec une solution initiale qui est sur la boucle fermée dans l'espace des phases.

- **Avantage** : intégration temporelle sur 1 période seulement (plus rapide)
- **Inconvénient** : plus difficile à mettre en œuvre
- **Méthode** : z_0 solution initiale approchée + corrections (Newton-Raphson)





Shooting et Continuation – S. Baguet – GDR DYNOLIN 14/10/2015

Principe

- On cherche les **solutions périodiques** i.e. tq

$$H(z_0) = z(z_0, t = T) - z_0 = z(T) - z(0) = 0$$

- D'où le **système à résoudre** :

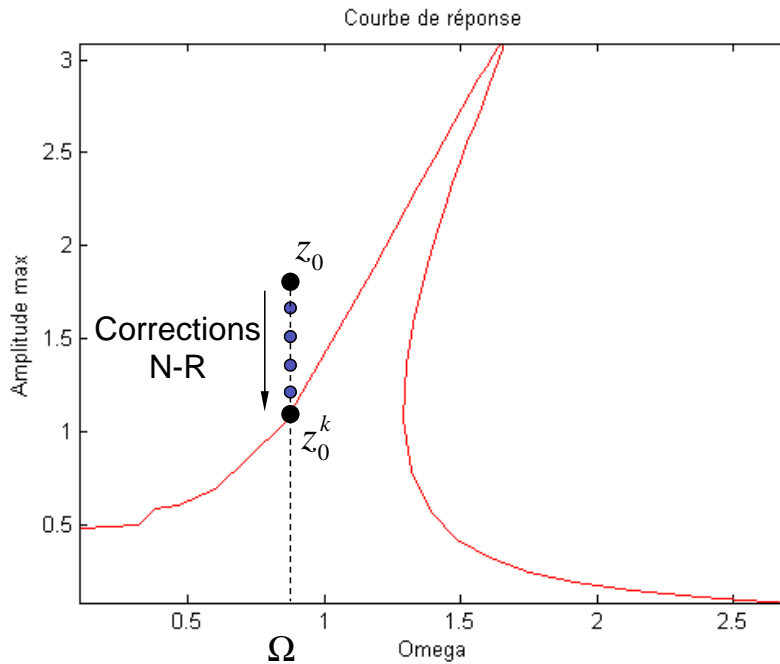
$$\begin{cases} \dot{z} = g(z, t) & (1) \\ H(z_0) = z(z_0, t = T) - z_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

Fonction non analytique.
L'évaluation de H passe par l'intégration temporelle des équations du mouvement (1) de t=0 à T + C.I. z(t=0)=z₀

- T=2π/Ω **fixé**. Soit z₀ une **solution initiale approchée**.
- Z₀ ne vérifie pas exactement (2).
- Correction de Newton-Raphson** : on cherche Δz tq z₀+Δz vérifie (2), i.e.

$$H(z_0 + \Delta z) = 0 \quad + \text{DL au 1er ordre}$$

$$H(z_0) + \left. \frac{\partial H}{\partial z_0} \right|_{(z_0, t=T)} \Delta z = 0$$



- On corrige de manière **itérative**

A l'itération k : $z_0^{k+1} = z_0^k + \Delta z$

avec Δz solution de $\frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t=T)} \Delta z = -H(z_0^k)$

- Jusqu'à ce qu'on ait atteint la **précision souhaitée** ϵ

Résidu relatif $\frac{\|H(z_0^{k+1})\|}{\|z_0^{k+1}\|} \leq \epsilon$

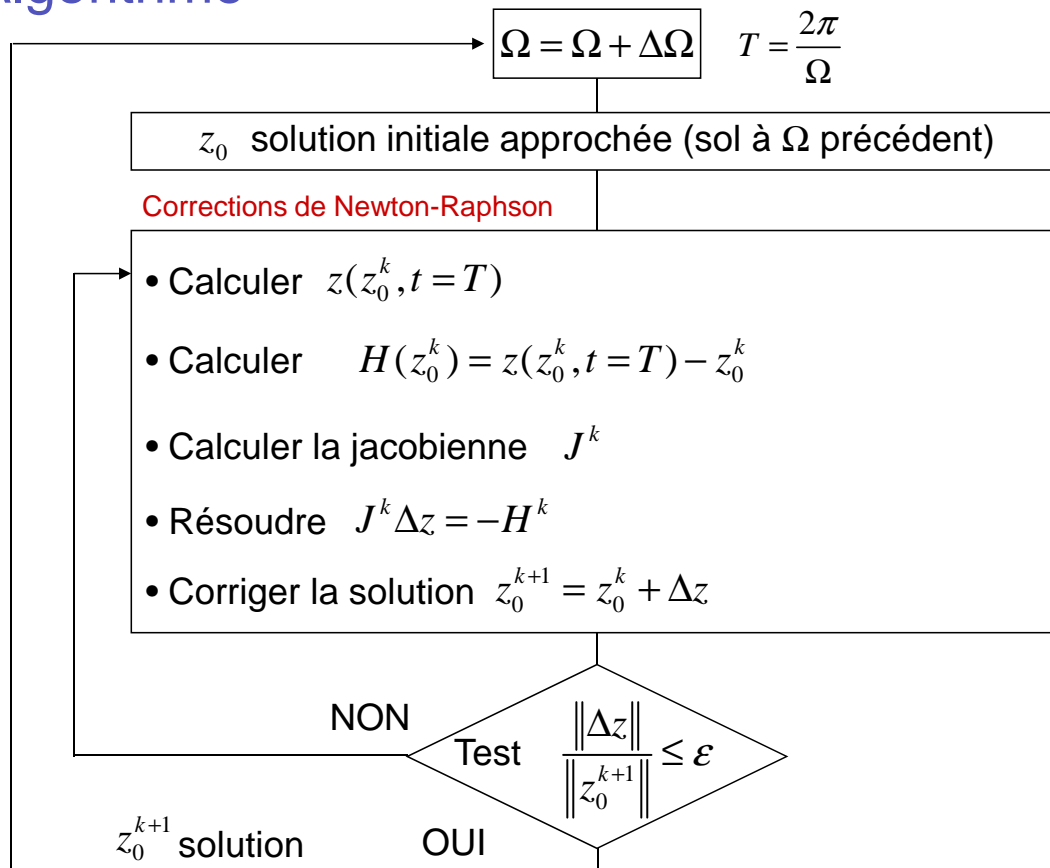
Critère en déplacement $\frac{\|\Delta z\|}{\|z_0^{k+1}\|} \leq \epsilon$

- Lorsqu'on a convergé, on incrémente Ω

$$\Omega = \Omega + \Delta\Omega \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

- Et on cherche le nouveau z_0 correspondant

Algorithme



Shooting et Continuation – S. Baguet – GDR DYNOLIN 14/10/2015

III – Shooting simple – continuation séquentielle

• Calcul du second membre $H(z_0^k)$

A l'aide de (2) : $H(z_0^k) = z(z_0^k, t = T) - z_0^k = 0$

avec $z(z_0^k, t = T)$ obtenu en intégrant (1) $\dot{z} = g(z, t)$

- sur la période T , ie pour t de 0 à T
- avec comme solution initiale z_0^k
- fonction `ode45` de matlab

```

% integration temporelle
[t z]=ode45(@duffing,0:dt:T,z0);
% calcul du second membre
H=z(end,:)-z0;
    
```

• **Calcul de la jacobienne** $J = \frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t=T)}$

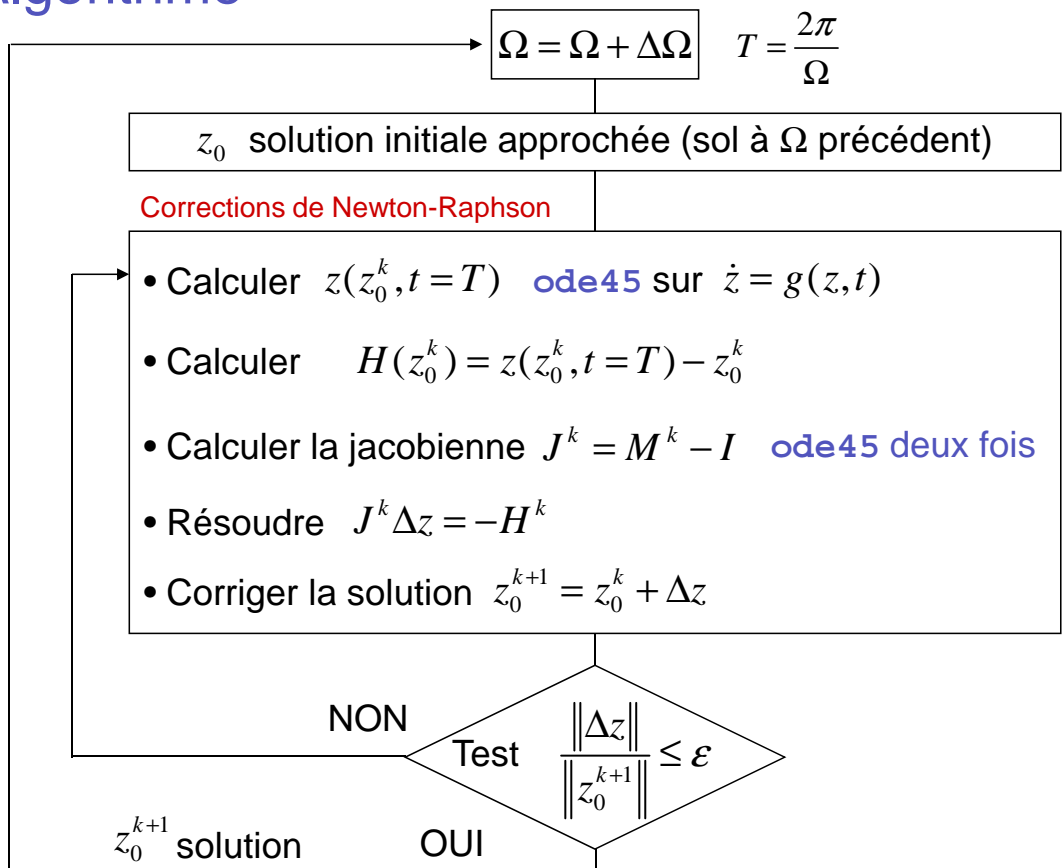
On utilise (2) : $H(z_0) = z(z_0, t = T) - z_0$ d'où $J = \frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t=T)} = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t=T)} - I$

avec $M = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t=T)}$ **matrice de monodromie** du système, calculée par différentiation numérique

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial z(x_0^k, \dot{x}_0^k, t = T)}{\partial x_0} & \frac{\partial z(x_0^k, \dot{x}_0^k, t = T)}{\partial \dot{x}_0} \\ \frac{z(x_0^k + \delta x, \dot{x}_0^k, t = T) - z(x_0^k, \dot{x}_0^k, t = T)}{\delta x} & \frac{z(x_0^k, \dot{x}_0^k + \delta \dot{x}, t = T) - z(x_0^k, \dot{x}_0^k, t = T)}{\delta \dot{x}} \end{bmatrix}$$

```
% calcul de la jacobienne
[t z1]=ode45(@duffing, 0:dt:T, [z0(1)+1e-5 z0(2)]);
[t z2]=ode45(@duffing, 0:dt:T, [z0(1) z0(2)+1e-5]);
M=[(z1(end,:)'-z(end,:))'/1e-5 (z2(end,:)'-z(end,:))'/1e-5];
J=M-eye(2,2);
```

Algorithme



Mise en oeuvre

```

while (OMEG<=OMEGA_fin)
% iterations de Newton-Raphson
iter=0;
while (norm(dz)/norm(z0)>eps)
% integration temporelle
[t z]=ode45(@duffing,0:dt:T,z0);
% calcul du second membre
H=z(end,:)-z0;
% calcul de la jacobienne J
[t z1]=ode45(@duffing,0:dt:T,[z0(1)+1e-5 z0(2)]);
[t z2]=ode45(@duffing,0:dt:T,[z0(1) z0(2)+1e-5]);
M=[(z1(end,:)-z(end,:))'/1e-5 (z2(end,:)-z(end,:))'/1e-5];
J=M-eye(2,2);
% Calcul de la correction
dz=J\(-H');
% correction
z0=z0+dz';
iter=iter+1;
end
% recherche du max
W(n)=max(z(:,1));
OMEG=OMEG+dOMEGA;
n=n+1;
end
    
```

Shooting et Continuation – S. Baguet – GDR DYNOLIN 14/10/2015

III – Shooting simple – continuation séquentielle

- **Calcul de la matrice de monodromie** $M(z_0, t = T) = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t=T)}$

Méthode alternative à partir
des **équations du mouvement** $\dot{z} = g(z, t)$

Dérivation / z_0 $\frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial z_0} (g(z, t))$

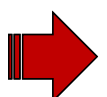
On intervertit l'ordre
des dérivées $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right) = \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z_0}$ $\left[G \right] = \frac{\partial g}{\partial z}$

Système différentiel $[\dot{\Phi}] = [G][\Phi]$ (2) avec $[\Phi(t)] = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t)}$

Matrice $M = \Phi(t = T)$ obtenue par intégration temporelle de (2) de $t=0$ à $t=T$
avec comme conditions initiales

$$\Phi(t = 0) = \frac{\partial z(z_0, t = 0)}{\partial z_0} = \frac{\partial z_0}{\partial z_0} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque : On intègre (1) et (2) simultanément



- **Calcul de la matrice de monodromie** $M = \Phi(t = T) = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t=T)}$

Application au duffing : $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = f \cos(\Omega t)$

$$\dot{z} = g(z, t)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -2\mu y - \omega_0^2 x - \alpha x^3 + f \cos(\Omega t) \end{pmatrix}$$

$$[G] = \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_0^2 + 3\alpha x^2) & -2\mu \end{bmatrix}$$

III – Shooting simple – continuation séquentielle

- **Calcul de la matrice de monodromie** $M = \Phi(t = T) = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t=T)}$

$$[\dot{\Phi}] = [G][\Phi] \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} m_1 & m_3 \\ m_2 & m_4 \end{bmatrix} \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_0^2 + 3\alpha x_1^2) & -2\mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_1 & \dot{m}_3 \\ \dot{m}_2 & \dot{m}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 & m_4 \\ -(\omega_0^2 + 3\alpha x^2) m_1 - 2\mu m_2 & -(\omega_0^2 + 3\alpha x^2) m_3 - 2\mu m_4 \end{bmatrix}$$

On résout **simultanément avec les équations du mouvement :**

$$\begin{cases} \dot{z} = g(z, t) \\ [\dot{\Phi}] = [G][\Phi] \end{cases} + \text{C.I.} \quad \begin{cases} z(t=0) = z_0 \\ \Phi(t=0) = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\mu y - \omega_0^2 x - \alpha x^3 + f \cos(\Omega t) \\ \dot{m}_1 = m_2 \\ \dot{m}_2 = -(\omega_0^2 + 3\alpha x^2) m_1 - 2\mu m_2 \\ \dot{m}_3 = m_4 \\ \dot{m}_4 = -(\omega_0^2 + 3\alpha x^2) m_3 - 2\mu m_4 \end{cases}$$

i.e. $\dot{\theta} = \tilde{g}(\theta, t)$

Cond. initiales

$$\theta = \begin{pmatrix} x \\ y = \dot{x} \\ m_1 \\ m_2 = \dot{m}_1 \\ m_3 \\ m_4 = \dot{m}_3 \end{pmatrix}$$

$$\theta(t=0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Calcul de la matrice de monodromie** $M = \Phi(t = T) = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t=T)}$

Définition du système sous forme d'état :

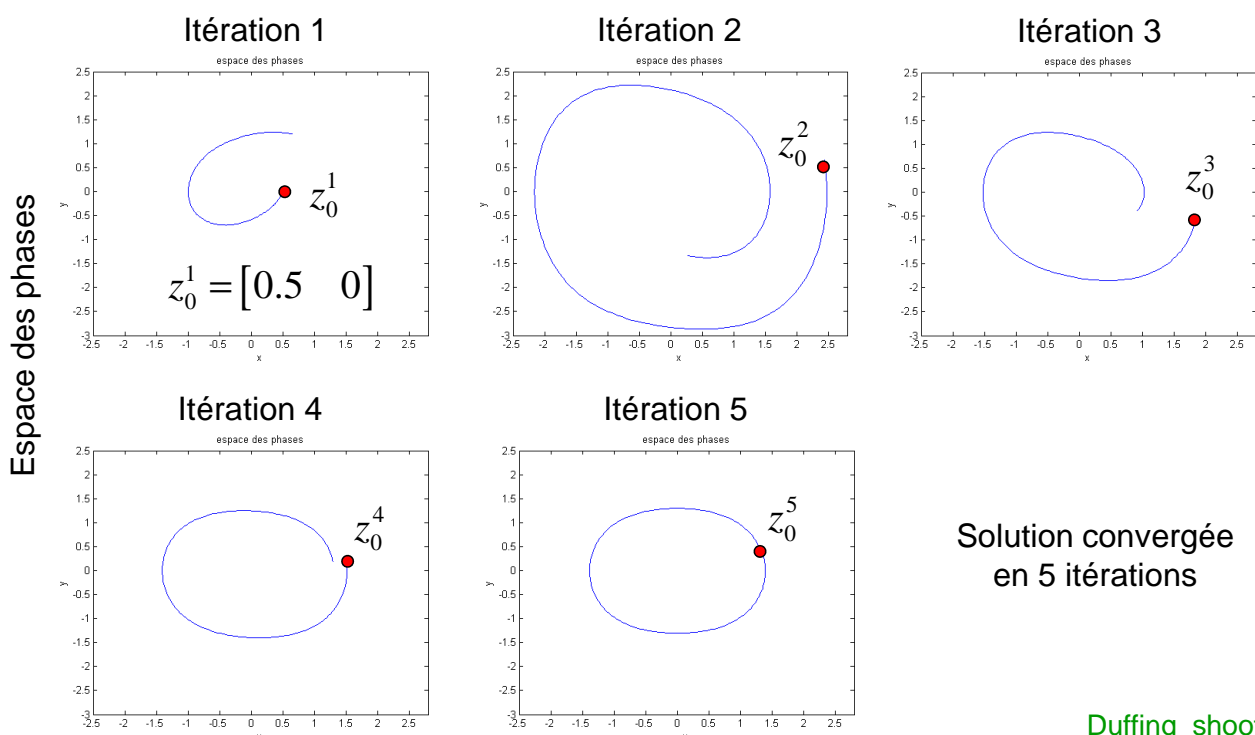
```
% Forced Duffing Oscillator
function xdot=duffing(t,z)
global mu omega alpha f OMEG
zdot(1)=z(2);
zdot(2)=-2*mu*z(2)-omega^2*z(1)-alpha*z(1)^3+f*cos(OMEG*t);
zdot(3)=z(4);
zdot(4)=- (omega^2+3*alpha*z(1)^2)*z(3)-2*mu*z(4);
zdot(5)=z(6);
zdot(6)=- (omega^2+3*alpha*z(1)^2)*z(5)-2*mu*z(6);
zdot=zdot';
end
```

Intégration numérique (ODE Ordinary differential Equation)

```
z0=[0.5 0];
options = odeset('RelTol',1e-3);
[t z]=ode45(@duffing,0:dt:T,[z0 1 0 0 1],options);
m1=z(end,3);m3=z(end,5);m2=z(end,4);m4=z(end,6);
M=[m1 m3 ; m2 m4];
Jz=M-eye(2,2);
```

Application au duffing $\mu = 0.05 \quad \omega_0 = 1 \quad \alpha = 0.25 \quad f = 0.5$

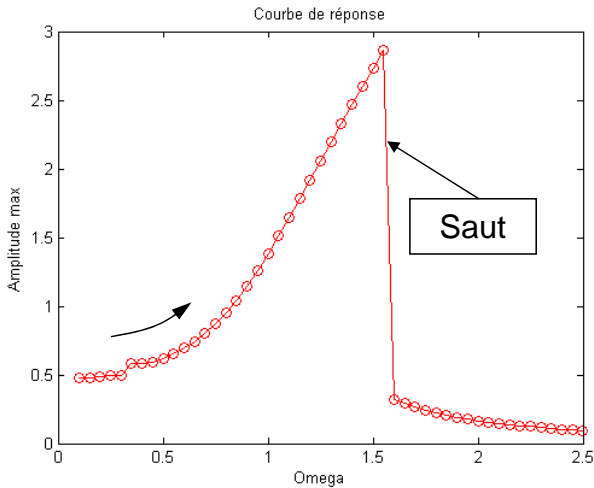
Ω fixé $T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \Omega = 1$



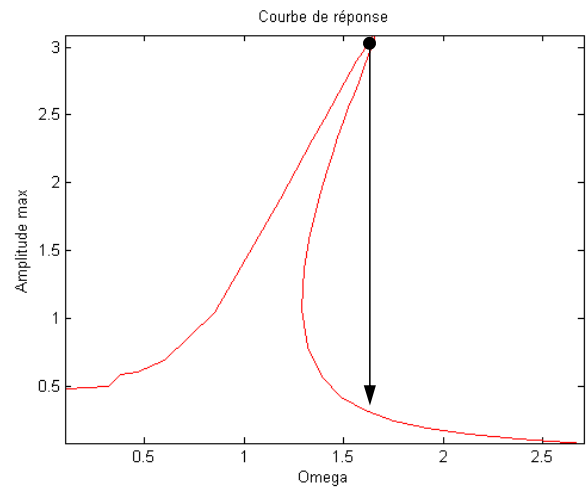
Application au duffing $\mu = 0.05 \quad \omega_0 = 1 \quad \alpha = 0.25 \quad f = 0.5$

Ω variable

Calcul pour $\Omega = 0.1 - 2.5$



Référence



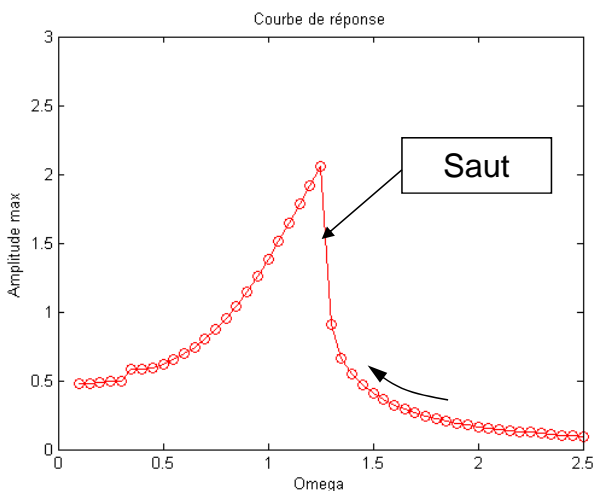
Saut au passage des **points limites** !

Duffing_shooting_a.m

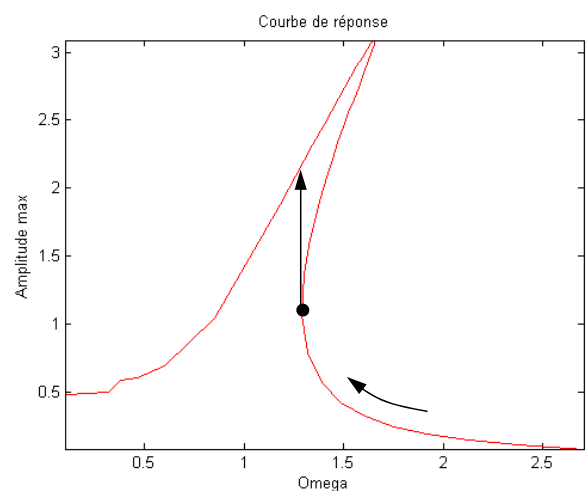
Application au duffing $\mu = 0.05 \quad \omega_0 = 1 \quad \alpha = 0.25 \quad f = 0.5$

Ω variable

Calcul pour $\Omega = 2.5 - 0.1$



Référence



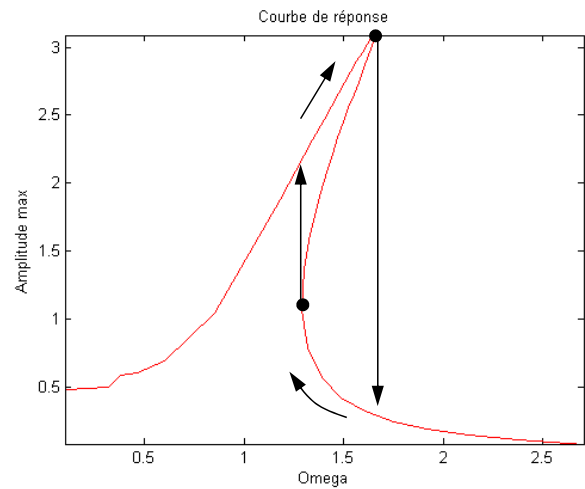
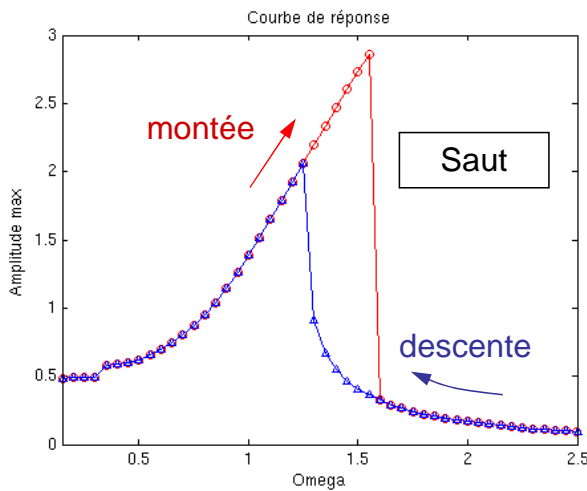
Saut au passage des **points limites** !

Duffing_shooting_b.m

Application au duffing

Montée $\Omega = 0.1 - 2.5$ Puis descente $\Omega = 2.5 - 0.1$

Référence



Limitation de la continuation séquentielle (Pilotage $\Omega = \Omega + \Delta\Omega$)

- Phénomène de saut au passage des points limites
- On n'obtient pas la totalité de la courbe de réponse (solutions Instables)

Solution : changer le type de pilotage \rightarrow Pilotage en longueur d'arc

Shooting et Continuation – S. Baguet – GDR DYNOLIN 14/10/2015

Plan

- I. Intégration temporelle des équations du mouvement
- II. Solutions périodiques
- III. Shooting simple – continuation séquentielle
- IV. Shooting – continuation par longueur d'arc

Principe Continuation séquentielle : $\Omega = \Omega_0$ fixé successivement
 Continuation par longueur d'arc : Ω variable

$$\begin{cases} \dot{z} = g(z, t, \Omega) \\ H(z_0, \Omega) = z(z_0, t = T, \Omega) - z_0 = 0 \end{cases}$$

duffing

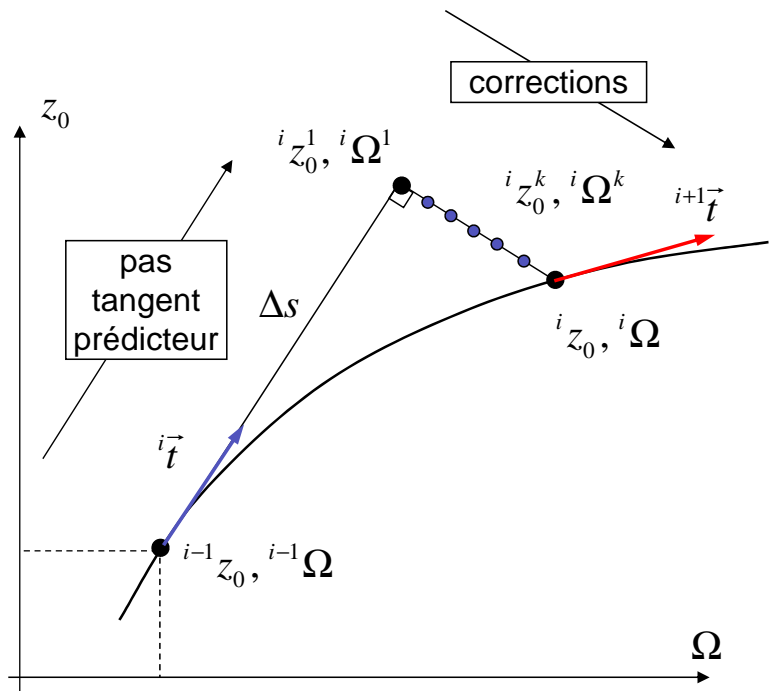
$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -2\mu y - \omega_0^2 x - \alpha x^3 + f \cos(\Omega t) \end{pmatrix}$$

• On part d'une **solution connue**

$${}^{i-1}z_0, {}^{i-1}\Omega$$

• **pas prédicteur** de longueur fixée Δs selon la direction tangente ${}^i\vec{t}$

• **corrections** selon la direction orthogonale à ${}^i\vec{t}$



Pas prédicteur Calcul du vecteur tangent ${}^i\vec{t} = \begin{pmatrix} \Delta z_0^1 \\ \Delta \Omega^1 \end{pmatrix}$

• **Solution du pas précédent** $H({}^{i-1}z_0, {}^{i-1}\Omega) = 0$

• **Vecteur tangent** ${}^i\vec{t} = (\Delta z_0^1 \ \Delta \Omega^1)^t$ solution de

$$\left. \frac{\partial H}{\partial z_0} \right|_{{}^{i-1}z_0, {}^{i-1}\Omega} \Delta z_0^1 + \left. \frac{\partial H}{\partial \Omega} \right|_{{}^{i-1}z_0, {}^{i-1}\Omega} \Delta \Omega^1 = 0 \quad (3)$$

• Condition de **normalisation du vecteur tangent**

$$\|{}^i\vec{t}\|^2 = \{\Delta z_0^1\}^T \cdot \{\Delta z_0^1\} + (\Delta \Omega^1)^2 = 1 \quad (4)$$

• On pose $a = \Delta \Omega^1$ et $\Delta z_0^1 = a \Delta \hat{z}$

(4) devient $a^2 (\Delta \hat{z}^T \Delta \hat{z} + 1) = 1$ i.e. $a = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta \hat{z}^T \Delta \hat{z} + 1}}$ d'où $\Delta \Omega^1 = a$

(3) devient $\left. \frac{\partial H}{\partial z_0} \right|_{{}^{i-1}} \Delta \hat{z} = - \left. \frac{\partial H}{\partial \Omega} \right|_{{}^{i-1}}$ d'où $\Delta \hat{z}$ puis $\Delta z_0^1 = a \Delta \hat{z}$

Pas prédicteur

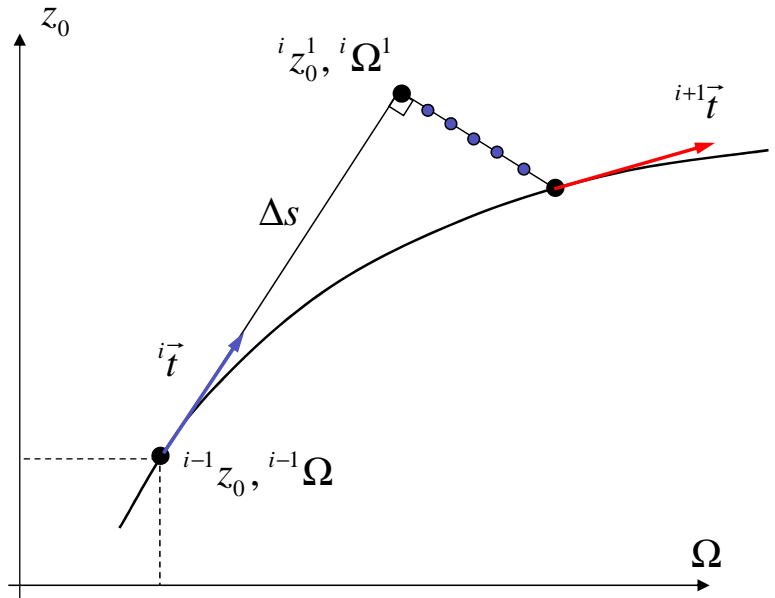
Etapas de calcul :

$$1. \quad \left. \frac{\partial H}{\partial z_0} \right|_{i-1} \Delta \hat{z} = - \left. \frac{\partial H}{\partial \Omega} \right|_{i-1}$$

$$2. \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta \hat{z}^T \Delta \hat{z} + 1}}$$

$$3. \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \Delta z_0^1 \\ \Delta \Omega^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \Delta \hat{z} \\ a \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} z_0^1 \\ \Omega^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^{i-1} \\ \Omega^{i-1} \end{pmatrix} + \Delta s \vec{t} = \begin{pmatrix} z_0^{i-1} \\ \Omega^{i-1} \end{pmatrix} + \Delta s \begin{pmatrix} \Delta z_0^1 \\ \Delta \Omega^1 \end{pmatrix}$$



Pas prédicteur

Sens de parcours

Donné par le signe de a

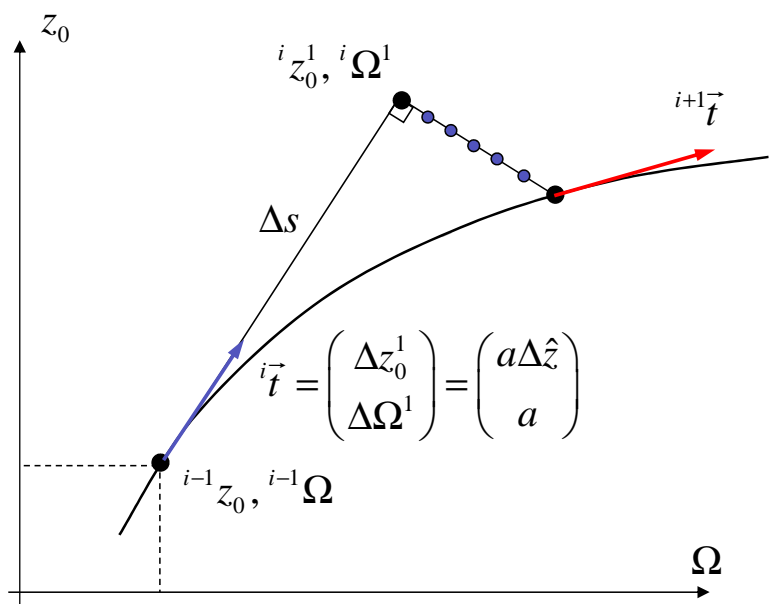
$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta \hat{z}^T \Delta \hat{z} + 1}}$$

On choisit le signe de a de façon à conserver le même sens de parcours, i.e. on veut

$${}^{i-1}\vec{t}^T \cdot {}^i\vec{t} > 0$$

$$\begin{pmatrix} {}^{i-1}\Delta z_0^1 \\ {}^{i-1}\Delta \Omega^1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a \Delta \hat{z} \\ a \end{pmatrix} > 0$$

$$a \left({}^{i-1}\Delta z_0^{1T} \cdot \Delta \hat{z} + {}^{i-1}\Delta \Omega^1 \right) > 0 \quad \text{sign}(a) = \text{sign} \left({}^{i-1}\Delta z_0^{1T} \cdot \Delta \hat{z} + {}^{i-1}\Delta \Omega^1 \right)$$



Corrections

On effectue des corrections dans la direction orthogonale pour se ramener sur la courbe solution

On cherche Δz_0 et $\Delta \Omega$ tels que $H(z_0^i + \Delta z_0, \Omega^i + \Delta \Omega) = 0$

Méthode de **Newton-Raphson** :

$$\frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{z_0^i, \Omega^i} \Delta z_0^k + \frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{z_0^i, \Omega^i} \Delta \Omega^k = -H(z_0^i, \Omega^i)$$

+ condition d'**orthogonalité** de la correction

$${}^i \vec{t}^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta z_0^k \\ \Delta \Omega^k \end{pmatrix} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \Delta z_0^{1T} \cdot \Delta z_0^k + \Delta \Omega^1 \Delta \Omega^k = 0$$

d'où le système à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H^k}{\partial z_0} & \frac{\partial H^k}{\partial \Omega} \\ \Delta z_0^{1T} & \Delta \Omega^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_0^k \\ \Delta \Omega^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{puis} \quad \begin{pmatrix} z_0^{i,k+1} \\ \Omega^{i,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^i \\ \Omega^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta z_0^k \\ \Delta \Omega^k \end{pmatrix}$$

IV – Shooting – continuation par longueur d'arc

Corrections

Etapas de calcul :

- Calcul de la correction

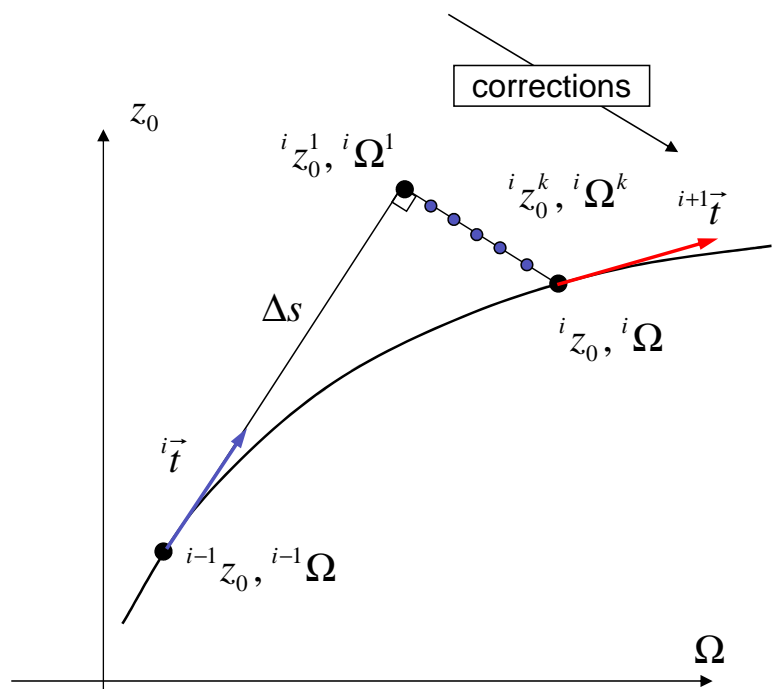
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H^k}{\partial z_0} & \frac{\partial H^k}{\partial \Omega} \\ \Delta z_0^{1T} & \Delta \Omega^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_0^k \\ \Delta \Omega^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H^k \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Correction de la solution

$$\begin{pmatrix} z_0^{i,k+1} \\ \Omega^{i,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^i \\ \Omega^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta z_0^k \\ \Delta \Omega^k \end{pmatrix}$$

- Critère d'arrêt

$$\frac{\|H^k\|}{\|z_0^{i,k+1}\|} \leq \varepsilon \quad \text{ou} \quad \frac{\|\Delta z_0^k\|}{\|z_0^{i,k+1}\|} \leq \varepsilon$$



Calcul des différents termes du système

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H^k}{\partial z_0} & \frac{\partial H^k}{\partial \Omega} \\ \Delta z_0^{1T} & \Delta \Omega^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_0^{k+1} \\ \Delta \Omega^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H^k \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Calcul du second membre** $H^k = H(z_0^k, \Omega^k)$

A l'aide de (2) : $H(z_0^k, \Omega^k) = z(z_0^k, t=T, \Omega^k) - z_0^k = 0$

avec $z(z_0^k, t=T, \Omega^k)$ obtenu en intégrant (1) $\dot{z} = g(z, t, \Omega)$

- sur la période T , ie pour t de 0 à $T = \frac{2\pi}{\Omega^k}$
- avec comme solution initiale z_0^k
- fonction `ode45` de matlab

```
% integration temporelle
[t z]=ode45(@duffing,0:dt:T,z0);
% calcul du second membre
H=z(end,:)-z0;
```

Shooting et Continuation – S. Baguet – GDR DYNOLIN 14/10/2015

IV – Shooting – continuation par longueur d'arc

- **Calcul de la jacobienne** $J_z = \frac{\partial H^k}{\partial z_0} = \frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, T, \Omega^k)}$

On utilise (2) : $H(z_0^k, \Omega^k) = z(z_0^k, T, \Omega^k) - z_0^k = 0$

d'où $J = \frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, T, \Omega^k)} = M^k - I$ avec $M^k = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t=T, \Omega^k)}$

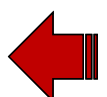
matrice de **monodromie**

$M^k = \Phi(t=T)$ avec Φ solution de

$$[\dot{\Phi}] = [G][\Phi] \quad \text{avec} \quad [G] = \frac{\partial g}{\partial z} \quad [\Phi(t)] = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, t, \Omega^k)}$$

Intégration temporelle de $t=0$ à $t=T$ avec comme C.I. $\Phi^k(t=0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Remarque : on intègre en même temps que $\dot{z} = g(z, t, \Omega)$



• **Calcul de la jacobienne** $J_{\Omega} = \frac{\partial H^k}{\partial \Omega} = \frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{(z_0^k, t=T, \Omega^k)}$

On utilise (2) : $H(z_0^k, \Omega^k) = z(z_0^k, t=T, \Omega^k) - z_0^k = 0$

d'où $J_{\Omega} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \Omega} \Big|_{t=T} + \frac{\partial z}{\partial \Omega} \Big|_{t=T} = \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{t=T} \frac{\partial T}{\partial \Omega} + \frac{\partial z}{\partial \Omega} \Big|_{t=T}$

$\frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{t=T} = \dot{z}(t=T) = g(z(T), t=T)$

$T = \frac{2\pi}{\Omega^k} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \Omega} = -\frac{2\pi}{(\Omega^k)^2}$

$\frac{\partial z}{\partial \Omega} \Big|_{t=T} = \frac{z(z_0^k, t=T, \Omega^k + \delta\Omega) - z(z_0^k, t=T, \Omega^k - \delta\Omega)}{2\delta\Omega}$

calcul par différentiation numérique

Pas adaptatif

Le **choix de la longueur Δs du pas tangent** prédicteur dépend du type de problème et du paramètre de continuation η choisi.

- si pas trop longs : trop d'itérations ou non-convergence
- si pas trop courts : trop de pas nécessaires pour décrire la courbe
- pas longs sur les portions peu non-linéaires
- pas courts sur les portions fortement non-linéaires

Longueur de pas adaptative : on adapte la longueur du pas tangent en fonction du nombre d'itérations ${}^{i-1}N$ du pas précédent :

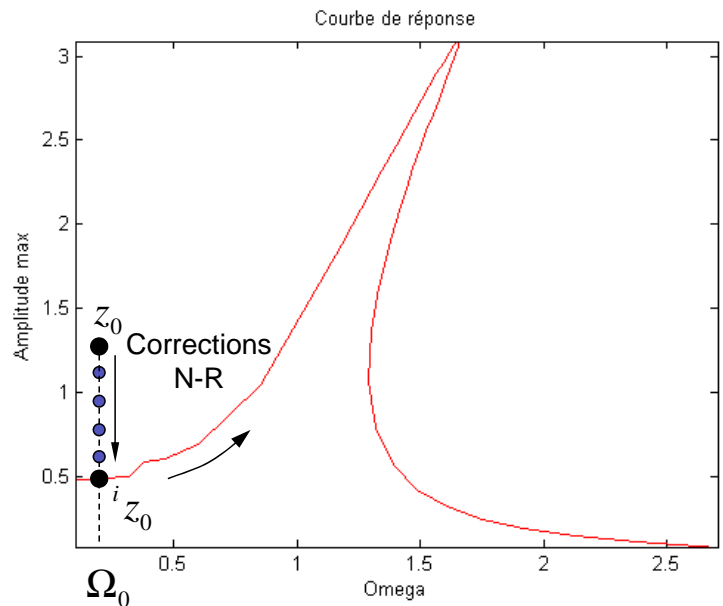
$${}^i \Delta s = \left(\frac{N^*}{{}^{i-1}N} \right) {}^{i-1} \Delta s$$

N^* : Nb d'itérations souhaitées (en moyenne)
 ${}^{i-1}N$: Nb d'itérations au pas précédent
 ${}^{i-1} \Delta s$: Longueur du pas précédent

Solution de départ

On démarre la continuation à un niveau d'énergie faible (pour $\Omega = \Omega_0$), de façon à ce que la solution NL soit **proche de la solution linéaire**.

On calcule la solution linéaire correspondante puis on fait quelques **itérations de Newton-Raphson** pour se ramener sur la courbe de réponse non-linéaire (cf continuation séquentielle à $\Omega = \Omega_0$ fixé)



IV – Shooting – continuation par longueur d'arc

Analyse de stabilité (Théorie de Floquet)

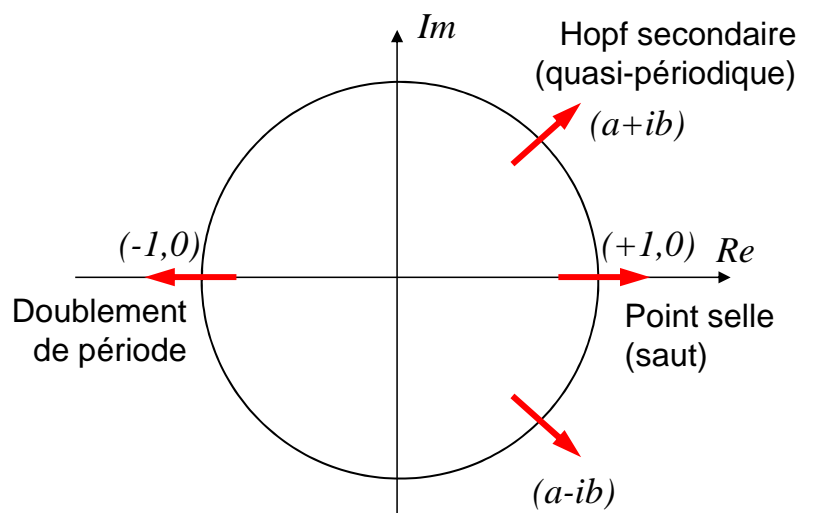
$$M = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{(z_0^k, T, \Omega^k)}$$

matrice de **monodromie**

Valeurs propres λ_i de M
= **multiplicateurs de Floquet**

- solution périodique **stable**
 $\forall i \quad |\lambda_i| < 1$

- solution périodique **instable**
 $\exists i \quad |\lambda_i| > 1$



Références

1. R. Seydel, [Practical Bifurcation and Stability Analysis](#), Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer, 2009.
2. A.H. Nayfeh, B. Balachandran, [Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods](#), New York, Wiley, 1995.
3. M. Peeters, R. Vigié, G. Sérandour, G. Kerschen, J.-C. Golinval, [Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques](#), Mech. Syst. Sig. Process., 23(1):195-216, 2009
4. S.M. Ibrahim, B.P. Patel, Y. Nath, [Modified shooting approach to the nonlinear periodic forced response of isotropic/composite curved beams](#), Int. J. Non-linear Mech, 44(10):1073-1084, 2009
5. PP. Sundararajan, ST. Noah, [Dynamics of Forced Nonlinear Systems Using Shooting/Arc-Length Continuation Method - Application to Rotor Systems](#), ASME. J. Vib. Acoust.,119(1):9-20, 1997.
6. P Ribeiro, [Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods](#), Comp. & Struct., 82(17–19):1413-1423, 2004