

# Équilibrage Harmonique et convolution : accélération des calculs, régimes quasi-périodiques

Pierre Vigué, Louis Guillot, Christophe Vergez, Bruno Cochelin



1 Introduction : Équilibrage Harmonique, continuation

2 Avec deux pulsations

3 Résultats

- Bifurcation vers le quasi-périodique
- Accrochages périodiques
- Saxophone (suite)

## 1 Introduction : Équilibrage Harmonique, continuation

## 2 Avec deux pulsations

## 3 Résultats

- Bifurcation vers le quasi-périodique
- Accrochages périodiques
- Saxophone (suite)

Un exemple : *toy model* de saxophone

Continuation des solutions périodiques de :

$$\dot{x}_1 = y_1$$

$$\dot{y}_1 = -a_1 y_1 - \Omega_1^2 x_1 + \lambda(y_1 + y_2) [a_2 - a_3(x_1 + x_2) - a_4(x_1 + x_2)^2]$$

$$\dot{x}_2 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -b_1 y_2 - \Omega_2^2 x_2 + \lambda(y_1 + y_2) [b_2 - b_3(x_1 + x_2) - b_4(x_1 + x_2)^2]$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda)$$

Un exemple : *toy model* de saxophone

Continuation des solutions périodiques de :

$$\dot{x}_1 = y_1$$

$$\dot{y}_1 = -a_1 y_1 - \Omega_1^2 x_1 + \lambda(y_1 + y_2) [a_2 - a_3(x_1 + x_2) - a_4(x_1 + x_2)^2]$$

$$\dot{x}_2 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -b_1 y_2 - \Omega_2^2 x_2 + \lambda(y_1 + y_2) [b_2 - b_3(x_1 + x_2) - b_4(x_1 + x_2)^2]$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda)$$

Reformulation quadratique :

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

Un exemple : *toy model* de saxophone

Continuation des solutions périodiques de :

$$\dot{x}_1 = y_1$$

$$\dot{y}_1 = -a_1 y_1 - \Omega_1^2 x_1 + \lambda(y_1 + y_2) [a_2 - a_3(x_1 + x_2) - a_4(x_1 + x_2)^2]$$

$$\dot{x}_2 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -b_1 y_2 - \Omega_2^2 x_2 + \lambda(y_1 + y_2) [b_2 - b_3(x_1 + x_2) - b_4(x_1 + x_2)^2]$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda)$$

Reformulation quadratique :

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

Solution périodique cherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{u}_{c,k} \cos(k\omega t) + \mathbf{u}_{s,k} \sin(k\omega t)$$

## Reformulation quadratique, continuation

$$\underbrace{\mathbf{c}_0}_{\mathbf{C}} + \underbrace{\lambda \mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0 \mathbf{u}}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\lambda \mathbf{l}_1 \mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}}_{\mathbf{Q}} = 0$$

# Reformulation quadratique, continuation

$$\underbrace{\mathbf{c}_0}_{\mathbf{C}} + \underbrace{\lambda \mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0 \mathbf{u}}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\lambda \mathbf{l}_1 \mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}}_{\mathbf{Q}} = 0$$

$$\mathbf{R}(\cdot) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$$

$$\mathbf{J}\mathbf{R}_Y = \mathbf{L} + \mathbf{Q}(Y, \cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, Y)$$



# Reformulation quadratique, continuation

$$\underbrace{\mathbf{c}_0}_{\mathbf{C}} + \underbrace{\lambda \mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0 \mathbf{u}}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\lambda \mathbf{l}_1 \mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}}_{\mathbf{Q}} = 0$$

$$\mathbf{R}(\cdot) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$$

$$\mathbf{J}\mathbf{R}_Y = \mathbf{L} + \mathbf{Q}(Y, \cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, Y)$$

Méthode directe (Manlab 1, 2) :

- opérateurs  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{Q}$  : définition explicite des combinaisons de coefficients
- les coordonnées de  $\mathbf{J}\mathbf{R}$  sont les images de la base canonique (boucle `for`).

# Reformulation quadratique, continuation

$$\underbrace{\mathbf{c}_0}_{\mathbf{C}} + \underbrace{\lambda \mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0 \mathbf{u}}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\lambda \mathbf{l}_1 \mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}}_{\mathbf{Q}} = 0$$

$$\mathbf{R}(\cdot) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$$

$$\mathbf{J}\mathbf{R}_Y = \mathbf{L} + \mathbf{Q}(Y, \cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, Y)$$

Méthode directe (Manlab 1, 2) :

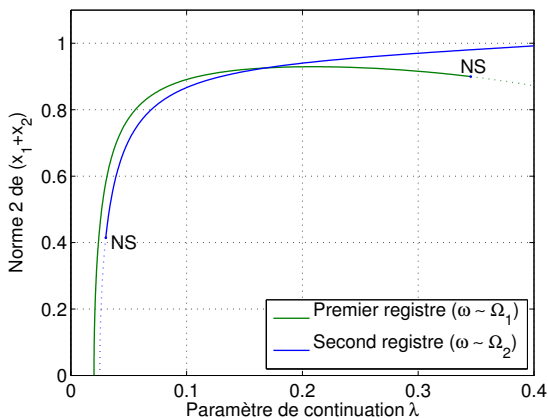
- opérateurs  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{Q}$  : définition explicite des combinaisons de coefficients
- les coordonnées de  $\mathbf{J}\mathbf{R}$  sont les images de la base canonique (boucle `for`).

Méthode tensorielle (Manlab 3) :  $\mathbf{Q}$  est une application bilinéaire donc elle admet une représentation par un tenseur d'ordre 3

$$\mathbf{Q}(Y, Y) = Y^t \underset{\equiv}{\mathbf{Q}} Y$$

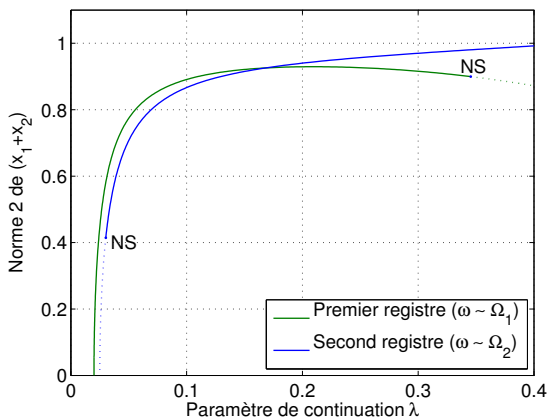
$$\ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) [a_2 - a_3(x_1 + x_2) - a_4(x_1 + x_2)^2]$$

$$\ddot{x}_2 + b_1 \dot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 = \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) [b_2 - b_3(x_1 + x_2) - b_4(x_1 + x_2)^2]$$



$$\ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = \lambda(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) [a_2 - a_3(x_1 + x_2) - a_4(x_1 + x_2)^2]$$

$$\ddot{x}_2 + b_1 \dot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 = \lambda(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) [b_2 - b_3(x_1 + x_2) - b_4(x_1 + x_2)^2]$$



- Comment suivre la branche quasi-périodique ?
- Comment garder des temps de calcul raisonnables ?

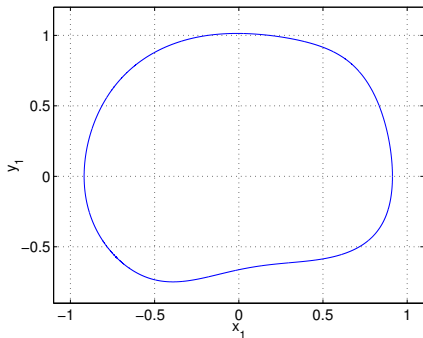
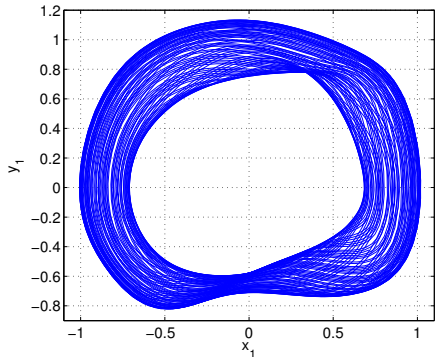
1 Introduction : Équilibrage Harmonique, continuation

2 Avec deux pulsations

3 Résultats

- Bifurcation vers le quasi-périodique
- Accrochages périodiques
- Saxophone (suite)

## Périodique vs quasi-périodique

Deux diagrammes de phase  $(x_1, y_1)$  :Périodique  
 $k\omega$ Quasi-périodique  
 $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$   
 $k_1, k_2$  : entiers relatifs  
 $\omega_1, \omega_2$  **incommensurables**

$$m\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

Solution quasi-périodique cherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H \mathbf{u}_{(k_1, k_2)} e^{i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t}$$

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

Solution quasi-périodique cherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H \mathbf{u}_{(k_1, k_2)} e^{i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t}$$

- coefficients  $\mathbf{u}_k \rightsquigarrow \mathbf{u}_{k_1, k_2}$



$$m\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

Solution quasi-périodique cherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H \mathbf{u}_{(k_1, k_2)} e^{i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t}$$

- coefficients  $\mathbf{u}_k \rightsquigarrow \mathbf{u}_{k_1, k_2}$
- dérivation :  $i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)\mathbf{u}_{k_1, k_2}$

$$m\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

Solution quasi-périodique cherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H \mathbf{u}_{(k_1, k_2)} e^{i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t}$$

- coefficients  $\mathbf{u}_k \rightsquigarrow \mathbf{u}_{k_1, k_2}$
- dérivation :  $i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)\mathbf{u}_{k_1, k_2}$
- produits de variables  $\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  : convolution 2d des matrices de coefficients (ex Matlab : conv2)

## Calcul de la matrice Jacobienne

$$\mathbf{R}(\cdot) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$$

$$\mathbf{J}\mathbf{R}_Y = \mathbf{L} + \mathbf{Q}(Y, \cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, Y)$$

# Calcul de la matrice Jacobienne

$$\mathbf{R}(\cdot) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$$

$$\mathbf{J}\mathbf{R}_Y = \mathbf{L} + \mathbf{Q}(Y, \cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, Y)$$

- 1 méthode directe (base canonique) : lent.

# Calcul de la matrice Jacobienne

$$\mathbf{R}(\cdot) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$$

$$\mathbf{J}\mathbf{R}_Y = \mathbf{L} + \mathbf{Q}(Y, \cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, Y)$$

- 1 méthode directe (base canonique) : lent.
- 2 méthode tensorielle : difficulté; calculs des tenseurs au démarrage.

# Calcul de la matrice Jacobienne

$$\mathbf{R}(\cdot) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$$

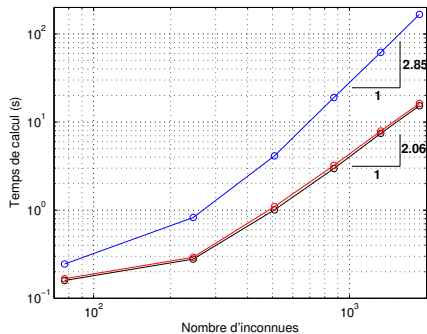
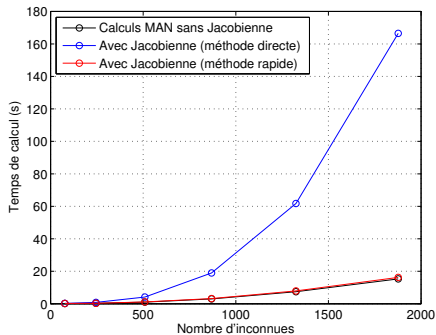
$$\mathbf{J}\mathbf{R}_Y = \mathbf{L} + \mathbf{Q}(Y, \cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, Y)$$

- 1 méthode directe (base canonique) : lent.
- 2 méthode tensorielle : difficulté; calculs des tenseurs au démarrage.
- 3 méthode rapide :
  - $\mathbf{Q}$  utilise la convolution de matrices,
  - donc  $\mathbf{Q}(Y, \cdot)$  utilise l'application *convolution à une entrée fixée...*
  - dont la matrice est connue (ex Matlab : `convmtx2`),
  - donc  $\mathbf{J}\mathbf{R}_Y$  s'obtient via des constructeurs matriciels.

# Temps de calcul d'un pas MAN

Selon la méthode de calcul de la Jacobienne

- par la base canonique (méthode directe, en bleu)
- par la méthode rapide (en rouge)



1 Introduction : Équilibrage Harmonique, continuation

2 Avec deux pulsations

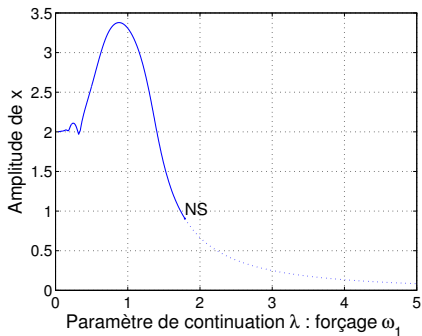
3 Résultats

- Bifurcation vers le quasi-périodique
- Accrochages périodiques
- Saxophone (suite)



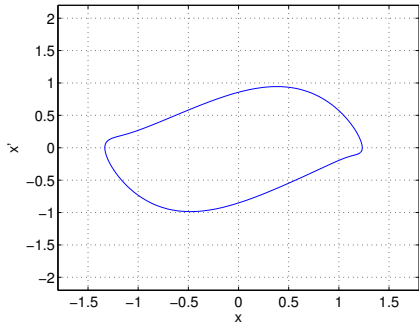
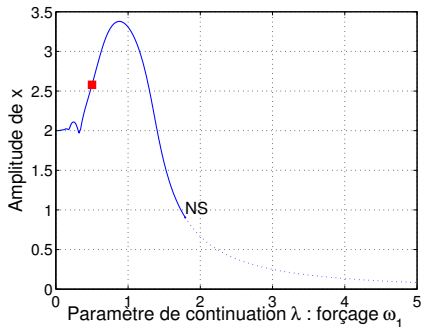
## Système forcé

$$\ddot{x} - \mu_1 \dot{x} + \mu_2 x \dot{x} + \mu_3 x^2 \dot{x} + a_1 x = \cos(\lambda t)$$



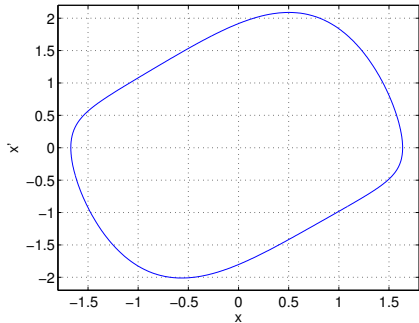
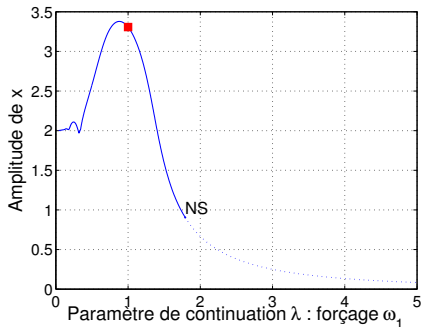
## Système forcé

$$\ddot{x} - \mu_1 \dot{x} + \mu_2 x \dot{x} + \mu_3 x^2 \dot{x} + a_1 x = \cos(\lambda t)$$



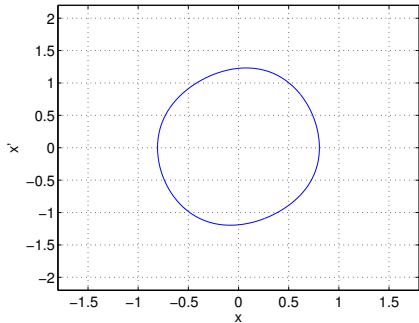
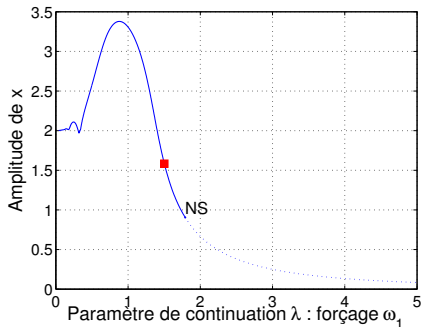
## Système forcé

$$\ddot{x} - \mu_1 \dot{x} + \mu_2 x \dot{x} + \mu_3 x^2 \dot{x} + a_1 x = \cos(\lambda t)$$



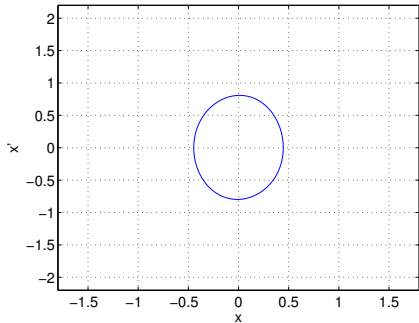
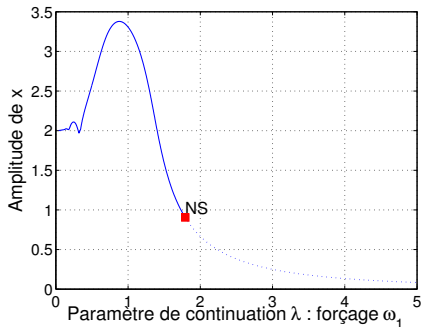
## Système forcé

$$\ddot{x} - \mu_1 \dot{x} + \mu_2 x \dot{x} + \mu_3 x^2 \dot{x} + a_1 x = \cos(\lambda t)$$



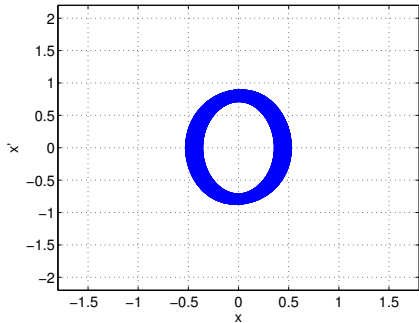
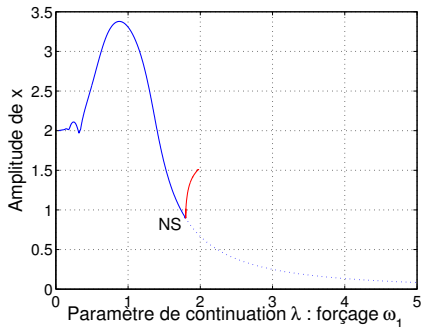
## Système forcé

$$\ddot{x} - \mu_1 \dot{x} + \mu_2 x \dot{x} + \mu_3 x^2 \dot{x} + a_1 x = \cos(\lambda t)$$



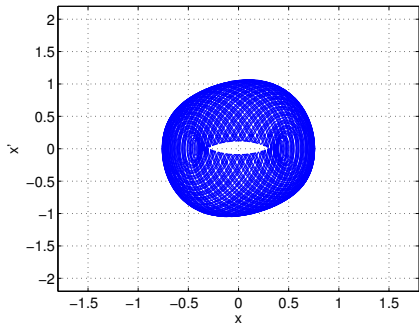
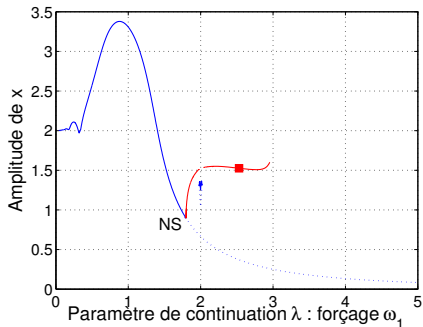
## Système forcé

$$\ddot{x} - \mu_1 \dot{x} + \mu_2 x \dot{x} + \mu_3 x^2 \dot{x} + a_1 x = \cos(\lambda t)$$



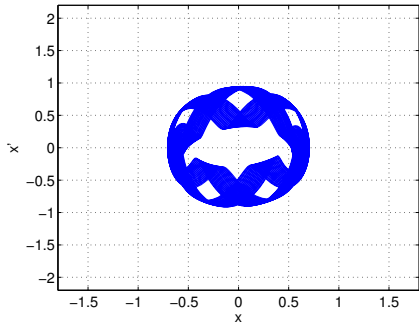
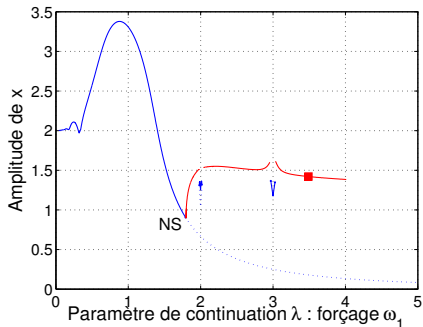
## Système forcé

$$\ddot{x} - \mu_1 \dot{x} + \mu_2 x \dot{x} + \mu_3 x^2 \dot{x} + a_1 x = \cos(\lambda t)$$



## Système forcé

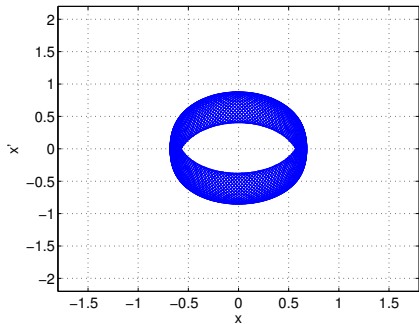
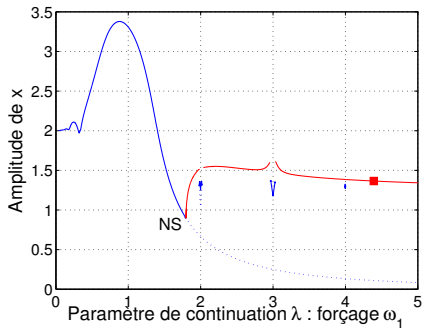
$$\ddot{x} - \mu_1 \dot{x} + \mu_2 x \dot{x} + \mu_3 x^2 \dot{x} + a_1 x = \cos(\lambda t)$$





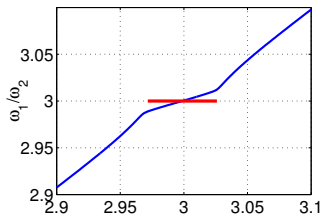
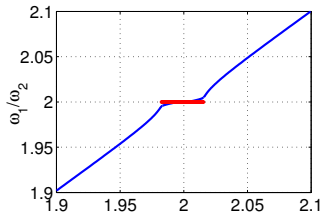
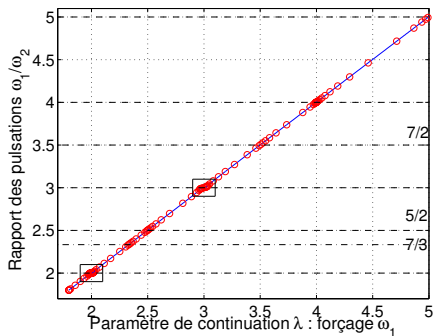
## Système forcé

$$\ddot{x} - \mu_1 \dot{x} + \mu_2 x \dot{x} + \mu_3 x^2 \dot{x} + a_1 x = \cos(\lambda t)$$



# Accrochages périodiques

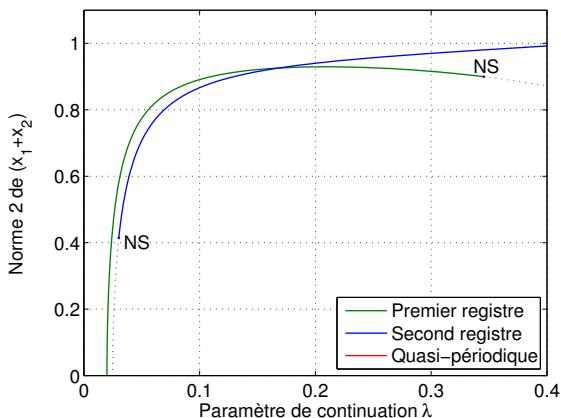
Le rapport des pulsations  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  est-il rationnel ?



## Système autonome : retour du saxophone

$$\ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = a_2 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - a_3 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2) - a_4 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2)^2$$

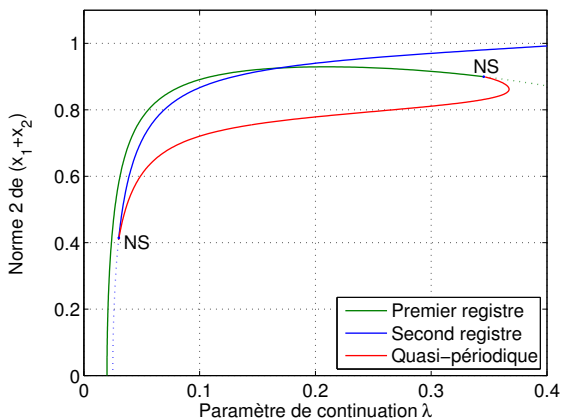
$$\ddot{x}_2 + b_1 \dot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 = b_2 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - b_3 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2) - b_4 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2)^2$$



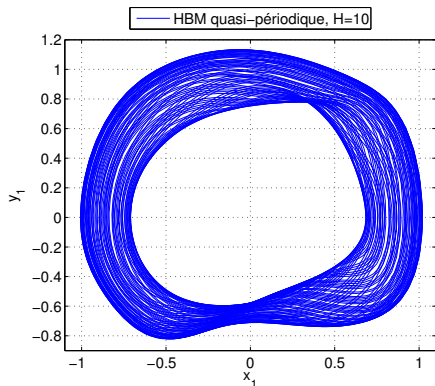
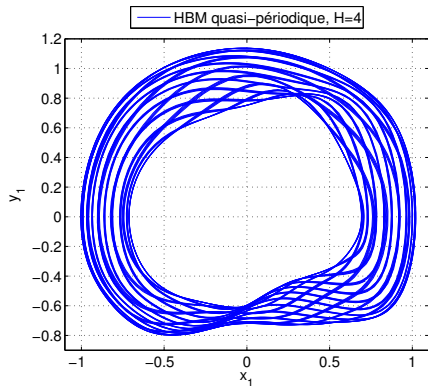
# Système autonome : retour du saxophone

$$\ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = a_2 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - a_3 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2) - a_4 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2)^2$$

$$\ddot{x}_2 + b_1 \dot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 = b_2 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - b_3 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2) - b_4 \lambda (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2)^2$$

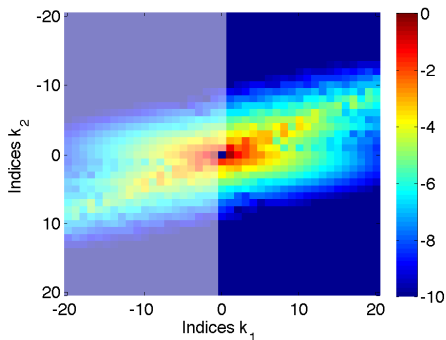
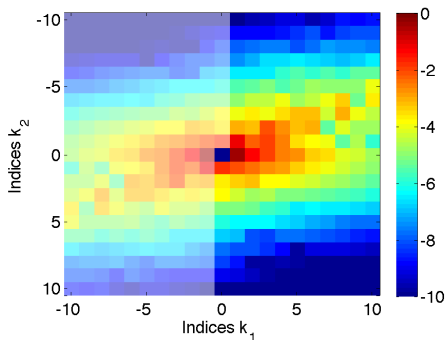
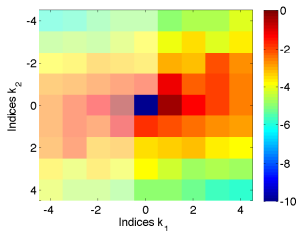


# Un exemple de solution exigeante



## Coefficients

$$\sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H x_{1,k_1,k_2}$$



Algorithme de continuation des solutions quasi-périodiques.

Accord avec l'intégration numérique.

Confirmation des solutions *a posteriori* par norme des coefficients de Fourier.

Robustesse de la méthode en situation d'accrochage périodique.

Algorithme de continuation des solutions quasi-périodiques.

Accord avec l'intégration numérique.

Confirmation des solutions *a posteriori* par norme des coefficients de Fourier.

Robustesse de la méthode en situation d'accrochage périodique.

Applications possibles en acoustique musicale :

- multiphoniques systématiques : flûtes pré-hispaniques (*sonido rajado*)
- multiphoniques recherchés : didgeridoo
- notes « qui roulent » par couplage entre mode du résonateur et mode de structure : note du loup des violoncelles et violons