

**ECOLE THEMATIQUE - DYNOLIN -
2018**
**Méthode de dynamique non linéaire pour
l'ingénierie des structures**
Travaux pratiques - MANLAB-4.0

Bruno COCHELIN, Louis GUILLOT

LMA, UPR 7051 CNRS, Aix Marseille Univ, Centrale Marseille

24 mai 2018

Mise sous forme quadratique de problèmes algébriques

Exemple 1 : basique, sans fonction

Equations principales :

$$r(u, \lambda) := u + u^3 - \lambda = 0$$

Definition des variables auxiliaires :

$$v = u^2$$

Ecriture quadratique des équations principales

$$R_1 := u + u * v - \lambda = 0$$

Ecriture quadratique des equations définissant les variables auxiliaires

$$R_{aux1} := v - u^2 = 0$$

Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [u \ \lambda \ v]^T$$

$$R_{tot} = [R_1 \ R_{aux1}]^T$$

Exemple 2 : simple, sans fonction

Equations principales ($\mu = cst$) :

$$\begin{aligned}r_1(u_1, u_2, \lambda) &:= 2u_1 - u_2 + 100 \frac{u_1}{1+u_1+u_1^2} - \lambda = 0 \\r_2(u_1, u_2, \lambda) &:= 2u_2 - u_1 + 100 \frac{u_2}{1+u_2+u_2^2} - \lambda - \mu = 0\end{aligned}$$

Definition des variables auxiliaires :

$$v_1 =$$

$$v_2 =$$

$$v_3 =$$

$$v_4 =$$

Ecriture quadratique des equations principales

$$R_1 :=$$

$$R_2 :=$$

Ecriture quadratique des equations définissant les variables auxiliaires

$$R_{aux1} :=$$

$$R_{aux2} :=$$

$$R_{aux3} :=$$

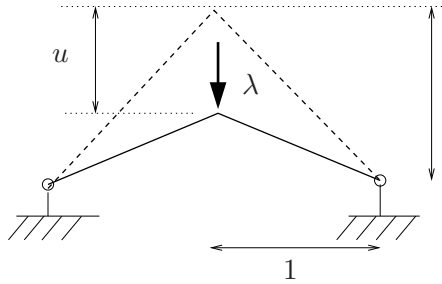
$$R_{aux4} :=$$

Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [u_1 \ u_2 \ \lambda \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T$$

$$R_{tot} = [R_1 \ R_2 \ R_{aux1} \ R_{aux2} \ R_{aux3} \ R_{aux4}]^T$$

Exemple 3 : un exemple mécanique simple



Déplacement : u

Longueur initiale : $l_0 = \sqrt{2}$

Longueur déformée :

$$l = \sqrt{1 + (1-u)^2}$$

Déformation (GL) : $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2}$

Energie de déformation :

$$W_{def}(u) = \frac{1}{2} \varepsilon^2$$

Energie potentielle :

$$P(u) = W_{def} - \lambda * u$$

Equations principales : $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$

Definition des variables auxiliaires :

Ecriture quadratique des équations principales

Ecriture quadratique des equations définissant les variables auxiliaires

Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [\quad]^T$$

$$R_{tot} = [\quad]^T$$

Exemple 4 : basique avec fonction

Equations principales :

$$r(u, \lambda) := u \exp(u) - \lambda = 0$$

Definition des variables auxiliaires :

$$v = \exp(u)$$

Ecriture quadratique des équations principales

$$R_1 := u * v - \lambda = 0$$

Ecriture (quadratique) des equations définissant les variables auxiliaires avec la différentielle pour les équations faisant intervenir une fonction

$$R_{aux1} := v - \exp(u) = 0$$

$$dR_{aux1} := dv - vdu = 0$$

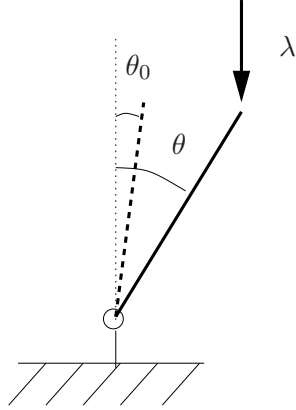
Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [u \ \lambda \ v]^T$$

$$R_{tot} = [R_1 \ R_{aux1}]^T$$

$$dR_{aux} = [dR_{aux1}]^T$$

Exemple 5 : simple avec fonction : flambage d'une barre articulée avec ressort de rappel cubique



Paramétrage : θ
Imperfection initiale : $\theta_0 = cst$

Equations principales :

$$\theta - \theta_0 + (\theta - \theta_0)^3 - \lambda * \sin(\theta) = 0$$

Definition des variables auxiliaires :

$$\begin{aligned} v_1 &= \theta - \theta_0 \\ v_2 &= v_1 * v_1 \\ v_3 &= \sin(\theta) \\ v_4 &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Ecriture quadratique des équations principales

$$R_1 := v_1 + v_1 * v_2 - \lambda * v_3 = 0$$

Ecriture (quadratique) des équations définissant les variables auxiliaires avec la différentielle pour les équations faisant intervenir une fonction

$$\begin{aligned} R_{aux1} &:= v_1 - \theta + \theta_0 = 0 \\ R_{aux2} &:= v_2 - v_1 * v_1 = 0 \\ R_{aux3} &:= v_3 - \sin(\theta) = 0 & dR_{aux3} &:= dv_3 - v_4 d\theta = 0 \\ R_{aux4} &:= v_4 - \cos(\theta) = 0 & dR_{aux4} &:= dv_4 + v_3 d\theta = 0 \end{aligned}$$

Finalement, le vecteur d'inconnues et les vecteurs d'équations sont :

$$\begin{aligned} U_{tot} &= [\theta \ \lambda \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T \\ R_{tot} &= [R_1 \ R_{aux1} \ R_{aux2} \ R_{aux3} \ R_{aux4}]^T \\ dR_{aux} &= [0 \ 0 \ dR_{aux3} \ dR_{aux4}]^T \end{aligned}$$

Exemple 6 : pour récapituler

Equations principales :

$$\begin{aligned}r_1(u_1, u_2, \lambda) &= u_1 + \lambda \frac{\exp(u_2)}{1+u_1} \\r_2(u_1, u_2, \lambda) &= u_2 + u_1 \tanh\left(\frac{-5u_1}{1+u_1u_2}\right)\end{aligned}$$

Definition des variables auxiliaires :

Écriture quadratique des équations principales

Écriture (quadratique) des équations définissant les variables auxiliaires avec la différentielle pour les équations faisant intervenir une fonction

Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [\quad]^T$$

$$R_{tot} = [\quad]^T$$

$$dR_{aux} = [\quad]^T$$

Exemple 7 : votre favori, à tester

Equations principales :

Definition des variables auxiliaires :

Ecriture quadratique des équations principales

Ecriture (quadratique) des equations définissant les variables auxiliaires avec la différentielle pour les équations faisant intervenir une fonction

Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [\quad]^T$$

$$R_{tot} = [\quad]^T$$

$$dR_{aux} = [\quad]^T$$