ECOLE THEMATIQUE - DYNOLIN - 2018
Méthode de dynamique non linéaire pour l'ingénierie des structures
Travaux pratiques - MANLAB-4.0

Bruno COCHELIN, Louis GUILLOT

LMA, UPR 7051 CNRS, Aix Marseille Univ, Centrale Marseille

24 mai 2018

Mise sous forme quadratique de systèmes d'équations différentielles ordinaires

Exemple 1 : Van der Pol

Equations principales :

$$r(u, \dot{u}, \ddot{u}, \lambda) := \ddot{u} \; - \; \alpha \dot{u} \; + \; \lambda(1 - u^2)\dot{u} \; + \; u = \; 0$$

Definition des variables auxiliaires :

$$v_1 := \; \lambda \dot{u}$$

$$v_2 := \; 1 - u^2$$

Ecriture quadratique des équations principales

$$R_1 := \ddot{u} \; - \; \alpha \dot{u} \; + \; v_1 \; * \; v_2 \; + \; u = \; 0$$

Ecriture quadratique des equations définissant les variables auxiliaires

$$R_{aux1} := v_1 \; - \; \lambda \dot{u} = 0$$

$$R_{aux2} := v_2 \; - \; 1 \; + \; u^2 = 0$$

Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [u \; \lambda \; v_1 \; v_2]^T$$

$$R_{tot} = [R_1 \; R_{aux1} \; R_{aux2}]^T$$

Exemple 2 : Duffing

Equations principales :

$$r(u, \lambda) := \ddot{u} \ + \ \lambda \dot{u} \ + \ u^3 \ + \ u = \ 0$$

Definition des variables auxiliaires :

$v :=$

Ecriture quadratique des équations principales

$R_1 :=$

Ecriture quadratique des equations définissant les variables auxiliaires

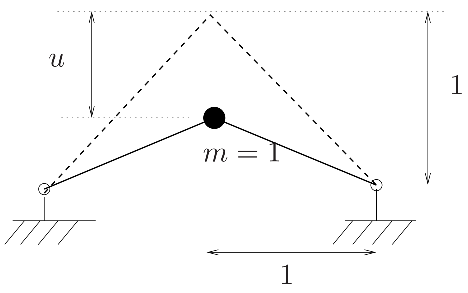
$R_{aux1} :=$

Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [u \ \lambda \ v]^T$$

$$R_{tot} = [R_1 \ R_{aux1}]^T$$

Exemple 3 : un exemple mécanique simple



Déplacement : u
Longueur initiale : $l_0 = \sqrt{2}$
Longueur déformée :
$l = \sqrt{1 + (1-u)^2}$
Déformation (GL) : $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2}$
Energie de déformation :
$W_{def}(u) = \frac{1}{2}\varepsilon^2$
Energie potentielle :
$P(u) = W_{def}$

Equations principales : $\ddot{u} + \lambda \dot{u} + \frac{\partial P}{\partial u} = 0$

Definition des variables auxiliaires :

Ecriture quadratique des équations principales

Ecriture quadratique des equations définissant les variables auxiliaires

Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]^T$$

$$R_{tot} = [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]^T$$

Exemple 4 : Pendule simple

Equations principales :

$$r(u, \dot{u}, \ddot{u}, \lambda) := \ddot{x} + \lambda\dot{x} + \sin(x) = \ 0$$

Definition des variables auxiliaires :

$$v_1 := \ \sin(u)$$

$$v_2 := \ \cos(u)$$

Ecriture quadratique des équations principales

$$R_1 := \ddot{x} + \lambda\dot{x} + v_1 = \ 0$$

Ecriture (quadratique) des équations definissant les variables auxiliaires avec la différentielle pour les équations faisant intervenir une fonction

$$R_{aux1} := v_1 - \sin(x) = 0 \qquad dR_{aux1} := dv_1 - v_2 dx = 0$$
$$R_{aux2} := v_2 - \cos(x) = 0 \qquad dR_{aux2} := dv_2 + v_1 dx = 0$$

Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [x \ \lambda \ v_1 \ v_2]^T$$

$$R_{tot} = [R_1 \ R_{aux1} \ R_{aux2}]^T$$

Exemple 5 : votre favori, à tester

Equations principales :

Definition des variables auxiliaires :

Ecriture quadratique des équations principales

Ecriture (quadratique) des equations définissant les variables auxiliaires avec la différentielle pour les équations faisant intervenir une fonction

Finalement, le vecteur d'inconnues et le vecteur d'équations sont :

$$U_{tot} = [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]^T$$

$$R_{tot} = [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]^T$$

$$dR_{aux} = [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]^T$$